DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.04.003

融数学建模思想于高等代数课堂教学之探索*

张四保
(喀什师范学院数学系,新疆 喀什 844000)

摘 要

高等代数是数学专业的一门重要的专业基础课之一,是学习后续数学课程的基石. 对于数学专业大多数学生而言,高等代数的学习是枯燥、乏味的,最主要一点是就缺乏应用实例. 本文阐述了融数学建模思想于高等代数课堂教学的重要性与途径,希望对教育工作者有所帮助.

关键词: 高等代数,数学建模思想,课堂教学.
中图分类号: G642.0

0 引 言

作为研究现实世界数量关系和空间形式的科学,数学一直以来和各种应用问题紧密联系. 数学不仅在于它概念的抽象性、逻辑的严密性,结论的明确性和体系的完整性,而且也在于它应用的广泛性. 自从20世纪以来,随着科学技术的迅速发展和计算机的日益普及,人们对各种问题的要求越来越精确,使得数学的应用越来越广泛和深入,特别是在知识经济时代的21世纪,数学的科学地位发生巨大的变化,它正在从国家经济和科技的后备走到了前沿. 经济发展的全球化、计算机的迅猛发展,数理论与方法的不断扩充使得数学已经成为当代高科技的一个重要组成部分和思想库,数学已经成为一种能够普遍实施的技术. 培养学生应用数学的意识和能力已经成为数学教学的一个重要方面.

《高等代数》是数学学科的一门传统课程. 在当今世界的数学内部学科趋于统一性和数学在其他学科的广泛应用性的今天,《高等代数》以其追求内容结构的清晰刻画和作为数学应用的基础,是大学数学各个专业的主干基础课程之一. 它是数学在其它学科应用的必需基础课程之一,又是数学修养的核心课程之一,同时也是全国数学类硕士研究生入学考试必考课程之一.

收稿日期: 2014-01-23
* 喀什师范学院教研教改重点课题资助(编号: kjgz1301)

数学建模是一种数学的思考方法,是运用数学的语言和方法,通过抽象、简化建立能近似刻画并"解决"实际问题的一种强有力的数学手段. 数学建模不仅是数学走向应用的必经之路,而且是启迪数学心灵的必胜之途. 数学建模不仅进一步凸现了它的重要性,而且已成为现代应用数学的一个重要组成部分,并为应用数学乃至整个数学科学的发展提供了进一步的机遇和广阔的前景. 数学建模的一般步骤如下图1.

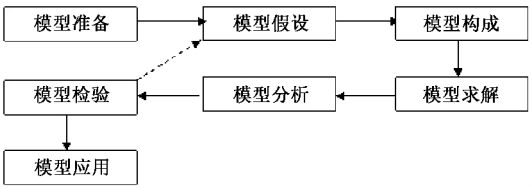


图1 数学建模的一般步骤

1 融数学建模思想于高等代数课堂教学的重要性

《高等代数》以严密的逻辑、系统的推理、抽象的思维作为其特点,其内容包括多种线性系统和结构. 在研究繁杂的实践问题时,线性化是其中常用的一种途径,高等代数学可以为问题的解决提供初步的答案;同时各种不同的范畴中线性部分又有一定的共性,高等代数又可以为之提供统一的平台,对其理论研究提供指导. 从而,高等代数学被广泛地应用到自然科学的各个领域中. 《高等代数》课程概念

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

多、内容抽象，是大学生心目中最难学的数学课之一，教学难度大. 加之，我院为民汉合校，学生进校时数学成绩较低，学生的数学文化、思维、计算等底子较为薄落，在学习的过程中大多学生反映该课程的知识枯燥无味、计算繁杂，且体会不到学习它的实际意义，丧失了学习的兴趣与动力.

想要改变这种状况和局面，有必要对我们现在的课程的教学思想和方法、手段进行改革. 数学建模是数学走向应用的必经之路. 李大潜院士表示，要用数学方法解决一个实际问题，就要建立相应的有代表性的数学模型，“数学原来的教学是有缺陷的. 过去数学教学有天衣无缝的数学体系，看起来很美，但忽略了来龙去脉，成为一个封闭的体系. 我们要开展数学建模竞赛活动，在大学开设数学建模、数学实验等课程，努力将数学建模思想融入数学类主干课程，让学生在学习知识的同时，有发现和创造的过程. [1] “将数学建模思想融入数学类主干课程”[2] 这一呼吁为高等代数教学改革指明了方向.

融建模思想于高等代数教学，将起着很重要的作用，其意义深远. 一是将有助于调动学生学习的积极性，激发学习的兴趣. 伟大的科学家爱因斯坦说过“兴趣是最好的老师. ”在高等代数教学中融入建模思想，将加深学生对一些概念、定理的理解与掌握，明白其来龙去脉，一旦学生对知识点产生浓厚的兴趣，就会主动去求知、去探索、去实践，并在求知、探索、实践中产生愉快的情绪和体验，激发学习的热情. 二是将有助于培养学生创新能力. 培养学生的创新能力是实施“科教兴国”和可持续发展战略的重要途径. 创造精神、创新能力是人才素质的核心. 在建立数学模型所经历的几个过程中，学生可以在不同的假定条件下、运用不同的数学语言、符号、方法，建立不同的模型，从中产生对比，得出最优的解决方案，发挥学生的创造力.

2　融数学建模思想于高等代数课堂教学的途径

2.1　融数学建模思想于定义、定理教学

高等代数中的有些定义是从实际问题中经抽象、概括而得到的. 纯数学理论的教育、教学有时是枯燥无味的，尤其是在一些定义、定理的教学. 学生在学习的过程中对于一些定义、定理理解不了，有时甚至是一头雾水，更别说应用了. 在教学的过程，教师要运用建模的思想积极引导学生去发现，分析，解决问题，这样学生便于掌握. 因此，在讲授某些定义、定理时，可将其产生的历史背景与演变过程进行翔实的讲解. 通过对其产生的有关背景问题的提出、分析、归纳与总结的讲解，使学生真真切切感受到实际问题转变为数学定义、概念、定理的方式与方法，培养学生的建模思想[3]，从而使学生能较快的掌握定义、概念、定理.

定义 1[4]　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项按下列规则带有符号: 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，取“+”号; 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，取“-”号. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

在讲解该定义的引入时，如果只是单一的告诉学生这是后面求解线性方程组所需的理论，这样缺乏实际应用的背景的介绍，学生可能难以接受，他们会感觉到定义的空洞. 初学者要想掌握该定义，可能都是靠死记硬背. 其实，行列式的几何背景很直观，就是空间平行多面体的“体积”. [5] 为此，在讲解的过程中，任课教师可以效仿法国数学家柯西求解空间多面体体积的过程，从平行四边形面积和空间六面体体积出发，得到 2、3 阶行列式的计算公式，从而引发学生对高阶行列式公式推导的兴趣[6].

定义 2[4]　设 $A=(a_{ik})_{sn}$，$B=(b_{kj})_{nm}$，那么矩阵 $C=(c_{ij})_{sm}$ 称为 A 与 B 的乘积，记为 $C=AB$，其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

在矩阵乘积概念的引入时，可以从现实生活中的实际问题出发，建立简单的模型，引导学生去了解实际应用，使学生了解其实际应用的直观性，明确学习的目的.

例　某货物公司向 3 个超市发送 4 种货物的数

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

量可列成矩阵 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}$,其中 a_{ij} 为公司向第 i 个超市发送的第 j 种货物的数量. 已知这 4 种货物的单价及单件重量列成矩阵 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\\b_{41}&b_{42}\end{bmatrix}$,其中 b_{j1} 为第 j 种货物的单价,b_{i2} 为第 i 货物的单件重量. 问 3 个超市共支付多少款给货物公司,货物公司共向 3 个超市发送多少货物?

假设货物公司得到的总款为 x,货物公司发送货物总量为 y,第 1、2、3 超市支付款分别 x_1,x_2,x_3,第 1、2、3 超市得到的货物总量分别 y_1,y_2,y_3,因而目标函数 1 为 $x=x_1+x_2+x_3$,目标函数 2 为 $y=y_1+y_2+y_3$,将 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3 构成矩阵 $C=\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}$,则有

$$\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\\x_3&y_3\end{bmatrix}=C=AB=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\\b_{41}&b_{42}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41}&a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}\end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned}x&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}+a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}+a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}+a_{34}b_{41}\\&=(a_{11}+a_{21}+a_{31})b_{11}+(a_{12}+a_{22}+a_{32})b_{21}+(a_{13}+a_{23}+a_{33})b_{31}+(a_{14}+a_{24}+a_{34})b_{41};\\y&=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}+a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}\\&=(a_{11}+a_{21}+a_{31})b_{12}+(a_{12}+a_{22}+a_{32})b_{22}+(a_{13}+a_{23}+a_{33})b_{32}+(a_{14}+a_{24}+a_{34})b_{42}.\end{aligned}$$

在讲解的过程,如果引入数学建模的新思想来解决类似的实际问题,对于矩阵乘法的教学可以起到事半功倍的效果.

2.2 融数学建模思想于例题教学

数学应用题其实就是一些简单的建模问题. 因而,在讲授基础理论知识的同时,可以适当的选择一些实际问题,引导学生去分析,并进行适当的、合理的简化假设,建立模型并求解,从而明白和理解现实世界、现实事物. 这样学生不但了解了建模的思想,而且体会到了高等代数在改造现实世界中的重要作用. 同时,学生的分析、解决问题的能力还将大大提高.

对于不同专业的学生,在知识点例题补充环节,任课教师尽量选择一些与专业相一致的数学模型,做到有的放矢,这样学生也可以体会到知识理论在其专业课中的用途. 例如,对于统计学、应用统计学专业的学生,在线性方程组或矩阵的逆矩阵的相关例题中,可以添加投入产出问题[7];对于信息与计算科学专业的学生,在矩阵的逆矩阵的相关例题中,可以添加破译密码问题. 下面以此为例来说明.

例 现发出一个信息 beauty,并给出了加密方法和加密后所得到的密文,同时给出相应的解密方法.

1. 假定每个英文字母对应着一个非负整数,空格和 26 个英文字母依次对应阿拉伯数字 0 ~ 26.

2. 假设将该单词中从左至右每 3 个字母为一组,并将其所对应的 3 个阿拉伯数字构成一个 3 维的行矩阵,加密后仍为 3 维的行矩阵,其分量仍为阿拉伯数字. 设 3 维向量 X 为明文,选一矩阵 A 使密文 $Y=XA$,同时要确保接收方能由 Y 准确地解出 X. 由矩阵相关理论,A 定是 3 阶可逆矩阵. 因而有,$X=YA^{-1}$. 因此原问题转化为:

(1) 把 beauty 翻译成两个行矩阵: $x_1=(2\quad 5\quad 1)$,$x_2=(21\quad 20\quad 25)$;

(2) 构造一个 $|A|=\pm 1$ 整数矩阵 A(A 不能为单位矩阵 E),取 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$;

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(3) 计算

$$y_1 = x_1 A = (2 \quad 5 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = (8 \quad 6 \quad 1),$$

$$y_2 = x_2 A = (21 \quad 20 \quad 25)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (66 \quad 45 \quad 25);$$

(4) 计算

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

(5) 计算

$$x_1 = y_1 A^{-1} = (8 \quad 6 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (2 \quad 5 \quad 1),$$

$$x_2 = y_2 A^{-1} = (66 \quad 45 \quad 25)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (21 \quad 20 \quad 25).$$

对照表得到明文为 beauty.

2.3　融数学建模思想于课后习题

传统的高等代数的知识体系与教学体系都偏重于理论的讲解,而真正的实际训练也大都体现在纯理论性的计算,这是远远不够的. 课后作业是课堂教学的延伸,是进一步理解、消化和巩固课堂教学内容的重要环节. [8] 可根据高等代数课程及习题的特点,将 3 人一组分成若干小组,每隔一段时间就所学的内容应用到实际问题中去,开展建模训练,通过这样形式的课后活动,不但可以使学生加强和巩固所学的内容,而且还可以培养学生的开拓创新、互帮互助的合作精神. 尤其是在大学生所关注问题上,如工作单位的选择、世界杯小组循环比赛的成绩等,这些与矩阵的特征值与特征向量都有关,课后可以让学生动手去操作.

3　融数学建模思想于高等代数课堂教学的几点建议

融数学建模思想于高等代数教学改革,在看到其所起的推动、促进作用同时,我们还应注意在实际操作的过程所体现出来以下问题.

1. 注意循序渐进原则. 人们对客观事物的认识,是一个由简到繁,由低级到高级,由直观到抽象的循"序"过程,人们对任何事物都不可能一步就达到对其本质的认识. 俗话说,一口气吃不出胖子,在融数学建模思想于高等代数课堂教学的过程中一定要把握尺度,不能急于求成,否则会适得其反.

2. 注意尺度,合理把握内容深度、广度与课时量的关系. 在教学过程中,教师不应过分追求数学模型的介入来处理教学内容,这样反而会有喧宾夺主的嫌疑. 如果在教学过程中刻意引入繁杂的模型例子来分析所要讲授知识,就会导致问题复杂化,课时可能不足,从而影响教学内容进度安排,收不到其应有的教学效果.

3. 教师应提高自身素质. 《中国教育改革和发展纲要》指出 "振兴民族的希望在教育,振兴教育的希望在教师". 教师应通过培训、学习精品课程、进修、与专家探讨等途径努力提高自身素养. 只有具备了广阔的知识面和眼界、对数学具有深刻的理解、拥有一定的数学建模意识和数学建模能力才能在课堂上顺利引进并成功实施,否则,融数学建模思想于教学就是无源之水、无本之木. [9]

4　结束语

随着大学数学教育教学改革的逐渐推进,数学建模思想逐渐渗透到数学的各个学科. 融数学建模思想于高等代数教学是一任重而道远的工作,它不可能是一蹴而就的. 如何行之有效地融数学建模思想于高等代数课程教育教学改革是广大教育工作者共同探究和实践的一项课题,它需要广大教育工作者付出更多的努力.

参　考　文　献

[1] 专家呼吁: 将数学建模思想融入数学类主干课程. [OL] http://scitech.people.com.cn/h/2011/0911/c227887-422634332.html

[2] 李大潜. 将数学建模思想融入数学类主干课程 [J]. 中国大学教,2006,(1):9-11.

[3] 全国大学生数学建模竞赛组委会主任李大潜院士在 20 周年庆典暨 2011 高教社杯颁奖仪式上的讲话. [OL] http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/c4c6291b2e597fa6cb1a84961b16106b.html.

(下转第 24 页)

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Study on State of Motioned Charged Particles in Magnetic Field near Surface

Tang Tiantian

(Department of Basic Education, Yantai Nanshan University, Yantai 265713)

Abstract

The equation of motioned charged particles in magnetic field near surface is deduced from the point of view of quantum mechanics. To explore the electronic Hamiltonian and more intuitive understanding of motion of charged particles in the magnetic field near the dielectric surface, the analytical solution of the differential equation for special trajectory is simulated with computer.

Key words: Hamiltonian, magnetic field, dielectric surface, numerical simulation.

(上接第 11 页)

[4] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编 王萼芳,石生明修订. 高等代数(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社,2003.
[5] 凌和良,万冰蓉. 应用型本科院校线性代数教学改革的几点构想 [J]. 赤峰学院学报,2013,29(4):3 -4.
[6] 段勇,黄廷祝. 将数学建模思想融入线性代数课程教学 [J]. 中国大学教学,2009,(3):43 -44.
[7] 许小芳. 数学建模思想融入线性代数教学的探索 [J]. 湖北理工学院学报,2013,29(5):67 -70.
[8] 杨刘. 在《高等代数》课程教学中融入数学建模思想研究 [J]. 教育教学论坛,2013,(13):236 -237.
[9] 王志琦. 探究数学建模思想在数学教学中运用 [J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版),2013,26(6):141 -143.

The Probe on Melting into Mathematical Modeling Thought in Classroom Teaching of Higher Algebra

Zhang Sibao

(Department of Mathematics, Kashgar Teachers College, Kashgar 844008)

Abstract

Higher algebra course is an important professional basic course in Mathematics major, and it is the cornerstone of studing follow courses. It is deadening and pedestrian to lerarn higher algebra course for Mathematics major students, because of lacking of application examples in it. In this paper, the significance and the ways of melting into mathematical modeling thought in classroom teaching of Higher Algebra were described, and to hope it is useful for educational workers.

Key words: higher algebra, mathematical modeling thought, classroom teaching.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net