DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.03.003

首都师范大学学报(自然科学版)
第36卷 第3期 Journal of Capital Normal University No. 3
2015年6月 (Natural Science Edition) June, 2015

调和平方凸函数及其 Jensen 型不等式

宋振云[1] 陈少元[2]

(1. 湖北职业技术学院 机电工程学院,湖北 孝感 432000;
2. 湖北职业技术学院 教务处,湖北 孝感 432000)

摘 要

基于对函数凸性的进一步考虑,给出了调和平方凸函数的概念、判定定理及其运算性质,建立了调和平方凸函数的 Jensen 型不等式.

关键词: 调和平方凸函数,判定定理,运算性质,Jensen 型不等式.
中图分类号: 0178.1

在控制论、最优化理论等领域的研究中,函数的凸性及其广义凸性所发挥的不可替代的作用是众所周知的[1-3]. 本文基于对函数凸性及其应用的进一步考虑,给出了调和平方凸函数的概念、判定定理及其运算性质,建立了调和平方凸函数的 Jensen 型不等式.

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,若 $\forall x_1,x_2\in I$ 及 $\forall t\in[0,1]$,$f(x)$ 满足

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\leqslant \sqrt{\frac{1}{t(f(x_1))^{-2}+(1-t)(f(x_2))^{-2}}},\quad (1)$$

则称 $f(x)$ 为区间 I 上的调和平方凸函数;如果不等式(1)中的不等号反向,则称 $f(x)$ 为区间 I 上的调和平方凹函数.

1 判定定理

定理1 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,则 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的调和平方凸(凹)函数的充要条件是:$g(x)=[f(x^{-1/2})]^{-2}$ 是 $[b^{-2},a^{-2}]$ 上的凹(凸)函数.

证明 充分性. 设 $g(x)=[f(x^{-1/2})]^{-2}$ 是 $[b^{-2},a^{-2}]$ 上的凹函数,任取 $x_1,x_2\in[a,b]$,则 $x_1^{-2},x_2^{-2}\in[b^{-2},a^{-2}]$,且 $g(x_1^{-2})=[f(x_1)]^{-2}$,$g(x_2^{-2})=[f(x_2)]^{-2}$,所以,$\forall t\in[0,1]$,

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)tx_2^{-2}}}\right)=f\left((tx_1^{-2}+(1-t)tx_2^{-2})^{-1/2}\right)$$
$$=(g(tx_1^{-2}+(1-t)tx_2^{-2}))^{-1/2}\leqslant[g(x_1^{-2})+(1-t)g(x_2^{-2})]^{-1/2}=\sqrt{\frac{1}{t(f(x_1))^{-2}+(1-t)(f(x_2))^{-2}}}$$

故 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的调和平方凸函数.

必要性. 若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的调和平方凸函数,令 $g(x)=[f(x^{-1/2})]^{-2}(x\in[b^{-2},a^{-2}])$,任取 $x_1,x_2\in[b^{-2},a^{-2}]$,则存在 $X_1,X_2\in[a,b]$,使 $x_1=X_1^{-2},x_2=X_2^{-2}$,因此,$\forall t\in[0,1]$ 有

$$g(tx_1+(1-t)x_2)=g(tX_1^{-2}+(1-t)X_2^{-2})=\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{tX_1^{-2}+(1-t)X_2^{-2}}}\right)\right]^{-2}\geqslant$$
$$\left[\sqrt{\frac{1}{t(f(X_1))^{-2}+(1-t)(f(X_2))^{-2}}}\right]^{-2}=$$
$$t(f(X_1))^{-2}+(1-t)(f(X_2))^{-2}=$$
$$t(f(x_1^{-1/2}))^{-2}+(1-t)(f(x_2^{-1/2}))^{-2}=$$
$$tg(x_1)+(1-t)g(x_2),$$

故,$g(x)$ 是区间 $[b^{-2},a^{-2}]$ 上的凹函数.

从以上的证明过程可知,定理的后半部分成立.

定理2 设 $f(x)$ 是定义在有限区间 $I\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,则函数 $f(x)$ 在 I 上是调和平方凸(凹)函数的充分必要条件是:$\varphi(t)=\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2}$(其中 $\forall x_1,x_2\in I$)是 $[0,1]$ 上的凹(凸)函数.

收稿日期: 2014-03-31

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明 充分性. 设 $\varphi(t)$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数，则 $\forall t_1,t_2 \in [0,1]$ 及 $\forall \alpha \in [0,1]$，有

$$\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) \geqslant \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2), \tag{2}$$

特别地，取 $t_1 = 1, t_2 = 0$，不等式(2)仍然成立，即

$$\varphi(\alpha \times 1 + (1-\alpha) \times 0) = \varphi(\alpha) \geqslant \alpha\varphi(1) + (1-\alpha)\varphi(0), \tag{3}$$

注意到 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{I}$，有 $\varphi(0) = (f(x_2))^{-2}$，$\varphi(1) = (f(x_1))^{-2}$，且

$$\varphi(\alpha) = \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha x_1^{-2} + (1-\alpha)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2}$$

因此，$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ 及 $\forall \alpha \in [0,1]$，(3)式即为

$$\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha x_1^{-2} + (1-\alpha)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2} \geqslant \alpha(f(x_1))^{-2} + (1-\alpha)(f(x_2))^{-2}$$

$$\Rightarrow f\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha x_1^{-2} + (1-\alpha)x_2^{-2}}}\right) \leqslant \sqrt{\frac{1}{\alpha(f(x_1))^{-2} + (1-\alpha)(f(x_2))^{-2}}},$$

故，函数 $f(x)$ 在区间 $\mathbf{I}$ 上是调和平方凸函数.

必要性. 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数，下面证明函数 $\varphi(t)$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ 及 $\forall t_1, t_2 \in [0,1]$，由两个正数平均的性质[4]知，

$$\sqrt{\frac{1}{t_1 x_1^{-2} + (1-t_1)x_2^{-2}}} \in [\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}] \subseteq \mathbf{I},$$

$$\sqrt{\frac{1}{t_2 x_1^{-2} + (1-t_2)x_2^{-2}}} \in [\min\{x_1,x_2\}, \max\{x_1,x_2\}] \subseteq \mathbf{I},$$

从而，存在 $X_1, X_2 \in \mathbf{I}$，使得

$$X_1 = \sqrt{\frac{1}{t_1 x_1^{-2} + (1-t_1)x_2^{-2}}},$$

$$X_2 = \sqrt{\frac{1}{t_2 x_1^{-2} + (1-t_2)x_2^{-2}}},$$

即，$X_1^{-2} = t_1 x_1^{-2} + (1-t_1)x_2^{-2}$，

$X_2^{-2} = t_2 x_1^{-2} + (1-t_2)x_2^{-2}$，

同样地，$\forall \alpha \in [0,1]$，有 $\sqrt{\frac{1}{\alpha X_1^{-2} + (1-\alpha)X_2^{-2}}} \in \mathbf{I}$，

因为 $\varphi(t) = \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2} + (1-t)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2}$，所以，$\forall t_1, t_2 \in [0,1]$ 及 $\forall \alpha \in [0,1]$，有

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) = \varphi(t_2 + \alpha(t_1 - t_2)) \\
&= \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{(t_2 + \alpha(t_1 - t_2))x_1^{-2} + (1 - (t_2 + \alpha(t_1 - t_2)))x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2} \\
&= \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{(t_2 x_1^{-2} + (1-t_2)x_2^{-2}) + \alpha\left[t_1 x_1^{-2} + (1-t_1)x_2^{-2}) - (t_2 x_1^{-2} + (1-t_2)x_2^{-2})\right]}}\right)\right]^{-2} \\
&= \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha X_1^{-2} + (1-\alpha)X_2^{-2}}}\right)\right]^{-2},
\end{aligned}$$

又函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数，所以

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) &= \left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\alpha X_1^{-2} + (1-\alpha)X_2^{-2}}}\right)\right]^{-2} \\
&\geqslant \left[\sqrt{\frac{1}{\alpha(f(X_1))^{-2} + (1-\alpha)(f(X_2))^{-2}}}\right]^{-2} \\
&= \alpha(f(X_1))^{-2} + (1-\alpha)(f(X_2))^{-2} \\
&= \alpha\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{t_1 x_1^{-2} + (1-t_1)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2} + \\
&\quad (1-\alpha)\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{t_2 x_1^{-2} + (1-t_2)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2} \\
&= \alpha\varphi(t_1) + (1-\alpha)\varphi(t_2),
\end{aligned}$$

即 $\varphi(t) = \left[f\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2} + (1-t)x_2^{-2}}}\right]^{-2}$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数.

同法可证定理 2 的后半部分.

定理 3 设 $f(x)$ 是定义在区间 $\mathbf{I} \subseteq (0, +\infty)$ 上的可导正值函数，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{I}$ 上为调和平方凸(凹)函数的充要条件是：$\forall x_0, x \in \mathbf{I}$，有

$$\frac{1}{(f(x))^2} \leqslant (\geqslant) \frac{x_0^3 f'(x_0)}{(f(x_0))^3}(x^{-2} - x_0^{-2}) + \frac{1}{(f(x_0))^2}. \tag{4}$$

证明 容易证明，当 $\lambda = 0, 1$ 时定理成立. 下面证明当 $\lambda \in (0,1)$ 时定理亦成立.

若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数，则 $\forall x_0, x \in \mathbf{I}(x_0 \neq x)$ 及 $\forall \lambda \in (0,1)$，有

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda (f(x))^{-2}+(1-\lambda)(f(x_0))^{-2}}}\geqslant f\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right),$$

$$\Rightarrow\lambda (f(x))^{-2}+(1-\lambda)(f(x_0))^{-2}\leqslant\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right)\right]^{-2},$$

$$\Rightarrow\lambda\left[(f(x))^{-2}-(f(x_0))^{-2}\right]\leqslant\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right)\right]^{-2}-(f(x_0))^{-2},$$

$$\Rightarrow(f(x))^{-2}-(f(x_0))^{-2}\leqslant\frac{\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right)\right]^{-2}-(f(x_0))^{-2}}{\lambda},$$

求 $\lambda\to 0^+$ 的极限,得

$$(f(x))^{-2}-(f(x_0))^{-2}\leqslant\lim_{\lambda\to+0}\frac{\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right)\right]^{-2}-(f(x_0))^{-2}}{\lambda}$$

$$=\lim_{\lambda\to+0}\left[f\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right)\right]^{-3}f'\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}}}\right)\left[\lambda x^{-2}+(1-\lambda)x_0^{-2}\right]^{-\frac{3}{2}}(x^{-2}-x_0^{-2})$$

$$=\frac{x_0^3 f'(x_0)}{(f(x_0))^3}(x^{-2}-x_0^{-2}),$$

即 $(f(x))^{-2}\leqslant\frac{x_0^3 f'(x_0)}{(f(x_0))^3}(x^{-2}-x_0^{-2})+(f(x_0))^{-2}$.

若不等式(4)成立, $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$, 令 $x_0=\sqrt{\frac{1}{\lambda x_1^{-2}+(1-\lambda)x_2^{-2}}}$,则 $x_0\in\mathbf{I}$,且

$$x_1^{-2}-x_0^{-2}=x_1^{-2}-(\lambda x_1^{-2}+(1-\lambda)x_2^{-2})=(1-\lambda)(x_1^{-2}-x_2^{-2}),$$

$$x_2^{-2}-x_0^{-2}=x_2^{-2}-(\lambda x_1^{-2}+(1-\lambda)x_2^{-2})=\lambda(x_2^{-2}-x_1^{-2}),$$

因此,由不等式(4)得

$$\begin{cases}\frac{1}{(f(x_1))^2}\leqslant\frac{f'(x_0)x_0^3}{(f(x_0))^3}(x_1^{-2}-x_0^{-2})+\frac{1}{(f(x_0))^2},\\ \frac{1}{(f(x_2))^2}\leqslant\frac{f'(x_0)x_0^3}{(f(x_0))^3}(x_2^{-2}-x_0^{-2})+\frac{1}{(f(x_0))^2},\end{cases}$$

$$\Rightarrow\lambda(f(x_1))^{-2}+(1-\lambda)(f(x_2))^{-2}\leqslant$$

$$\frac{\lambda f'(x_0)x_0^3(x_1^{-2}-x_0^{-2})+\lambda f(x_0)}{(f(x_0))^3}+\frac{(1-\lambda)f'(x_0)x_0^3(x_1^{-2}-x_0^{-2})+(1-\lambda)f(x_0)}{(f(x_0))^3}$$

$$=\frac{\lambda(1-\lambda)f'(x_0)x_0^3\left[(x_1^{-2}-x_2^{-2})+(x_2^{-2}-x_1^{-2})\right]+f(x_0)}{(f(x_0))^3}$$

$$=\frac{1}{(f(x_0))^2}=\frac{1}{\left[f(1/(\lambda x_1^{-2}+(1-\lambda)x_2^{-2}))\right]^2},$$

即 $f\left(\frac{1}{\lambda x_1^{-2}+(1-\lambda)x_2^{-2}}\right)\leqslant\sqrt{\frac{1}{\lambda(f(x_1))^{-2}+(1-\lambda)(f(x_2))^{-2}}}$

故 $f(x)$ 是区间 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数.

同样地可证明定理 3 的后半部分.

定理 4　设 $f(x)$ 是区间 $\mathbf{I}\subseteq(0,+\infty)$ 上的二阶可导正值函数,则 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸(凹)函数的充分必要条件是

$$6x(f'(x))^2+f(x)\left[3f'(x)-2xf''(x)\right]\geqslant(\leqslant)0. \tag{5}$$

证明　仅证 $f(x)$ 为调和平方凸函数的情形,同样地可证 $f(x)$ 为调和平方凹函数的情形.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

令 $x=\sqrt{\dfrac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}$($x_1,x_2\in\mathbf{I}$,$t\in[0,1]$),则 $x\in\mathbf{I}$,对函数 $\varphi(t)=\left[f\left(\sqrt{\dfrac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2}$ 在区间 $[0,1]$ 上求变量 t 的一阶、二阶导数并以 x 代 $\sqrt{\dfrac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}$,得

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{f'(x)x^3}{(f(x))^3}(x_1^{-2}-x_2^{-2})\\&=(f(x))^{-3}f'(x)x^3(x_1^{-2}-x_2^{-2}).\\\varphi''(t)&=-\frac{1}{2}x^5(f(x))^{-4}(x_1^{-2}-x_2^{-2})^2\\&\quad[6x(f'(x))^2-2xf(x)f''(x)+3f(x)f'(x)]\\&=-\frac{1}{2}x^5(f(x))^4(x_1^{-2}-x_2^{-2})^2[(f'(x))^2+\\&\quad f(x)(3f'(x)-2xf''(x))].\end{aligned}$$

注意到 $x\in\mathbf{I}\subseteq(0,+\infty)$,显然,有

$$\varphi''(t)\leqslant 0\Leftrightarrow 6x(f'(x))^2+f(x)[3f'(x)-2xf''(x)]\geqslant 0.$$

根据定理 2,$f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数 $\Leftrightarrow$ $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$,函数 $\varphi(t)=\left[f\left(\sqrt{\dfrac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\right]^{-2}$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数 $\Leftrightarrow$

$$\varphi''(t)\leqslant 0\Leftrightarrow 6x(f'(x))^2+f(x)[3f'(x)-2xf''(x)]\geqslant 0,$$

所以,$f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数的充要条件是

$$6x(f'(x))^2+f(x)[3f'(x)-2xf''(x)]\geqslant 0.$$

定理 5 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格减少的平方凹函数,则 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凹函数.

证明 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t\in[0,1]$,由 Cauchy 不等式[5],有

$$\begin{aligned}&[tx_1^2+(1-t)x_2^2][tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}]\\&=[(\sqrt{tx_1^2})^2+(\sqrt{(1-t)x_2^2})^2][(\sqrt{tx_1^{-2}})^2+\\&\quad(\sqrt{(1-t)x_2^{-2}})^2]\\&\geqslant[\sqrt{tx_1^2}\sqrt{tx_1^{-2}}+\sqrt{(1-t)x_2^2}\sqrt{(1-t)x_2^{-2}}]^2=1,\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}\leqslant tx_1^2+(1-t)x_2^2\Rightarrow$ $\sqrt{\dfrac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\leqslant\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2}$,

同理有 $\sqrt{\dfrac{1}{t(f(x_1))^{-2}+(1-t)(f(x_2))^{-2}}}$ $\leqslant\sqrt{t(f(x_1))^2+(1-t)(f(x_2))^2}$,

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{I}$ 上是严格减少的且为平方凹函数,所以

$$\begin{aligned}f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)&\geqslant f(\sqrt{tx_1^2+(1-t)x_2^2}),\\&\geqslant\sqrt{t(f(x_1))^2+(1-t)(f(x_2))^2}\\&\geqslant\sqrt{\frac{1}{t(f(x_1))^{-2}+(1-t)(f(x_2))^{-2}}}\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凹函数.

利用 Cauchy 不等式同样地可以证明:

定理 6 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凹函数.

定理 7 设 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 是 $\mathbf{I}\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,若 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凸函数,则函数 $\dfrac{1}{f_1(x)f_2(x)}$ 是 $\mathbf{I}$ 上的调和平方凹函数.

证明 对 $\mathbf{I}\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 和任意 $x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $t\in[0,1]$,由推广的 Cauchy 不等式[6],有

$$\begin{aligned}&[t(f_1(x_1))^{-2}+(1-t)(f_1(x_2))^{-2}][t(f_2(x_1))^{-2}+(1-t)(f_2(x_2))^{-2}]\times[t(f_1(x_1)f_2(x_1))^2+\\&\quad(1-t)(f_1(x_2)f_2(x_2))^2]\\&=[(\sqrt[3]{t(f_1(x_1))^{-2}})^3+(\sqrt[3]{(1-t)(f_1(x_2))^{-2}})^3][(\sqrt[3]{t(f_2(x_1))^{-2}})^3+(\sqrt[3]{(1-t)(f_2(x_2))^{-2}})^3]\times\\&\quad[(\sqrt[3]{t(f_1(x_1)f_2(x_1))^2})^3+(\sqrt[3]{(1-t)(f_1(x_2)f_2(x_2))^2})^3]\\&\geqslant[\sqrt[3]{t(f_1(x_1))^{-2}}\sqrt[3]{t(f_2(x_1))^{-2}}\sqrt[3]{t(f_1(x_1)f_2(x_1))^2}+\\&\quad\sqrt[3]{(1-t)(f_1(x_2))^{-2}}\sqrt[3]{(1-t)(f_2(x_2))^{-2}}\sqrt[3]{(1-t)(f_1(x_2)f_2(x_2))^2}]^3\\&=[t+(1-t)]^3=1\end{aligned}$$

所以 $[t(f_1(x_1))^{-2}+(1-t)(f_1(x_2))^{-2}][t(f_2(x_1))^{-2}+(1-t)(f_2(x_2))^{-2}]$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\geqslant \frac{1}{t(f_1(x_1)f_2(x_1))^{2}+(1-t)(f_1(x_2)f_2(x_2))^{2}}$$

从而 $\sqrt{t(f_1(x_1))^{-2}+(1-t)(f_1(x_2))^{-2}}\sqrt{t(f_2(x_1))^{-2}+(1-t)(f_2(x_2))^{-2}}$

$$\geqslant \sqrt{\frac{1}{t(f_1(x_1)f_2(x_1))^{2}+(1-t)(f_1(x_2)f_2(x_2))^{2}}}.$$

因为

$$0\leqslant f_1\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\leqslant\sqrt{\frac{1}{t(f_1(x_1))^{-2}+(1-t)(f_1(x_2))^{-2}}}$$

$$0\leqslant f_2\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\leqslant\sqrt{\frac{1}{t(f_2(x_1))^{-2}+(1-t)(f_2(x_2))^{-2}}},$$

所以 $0\leqslant f_1\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)f_2\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1}{t(f_1(x_1))^{-2}+(1-t)(f_1(x_2))^{-2}}}\sqrt{\frac{1}{t(f_2(x_1))^{-2}+(1-t)(f_2(x_2))^{-2}}}$$

于是,有

$$\frac{1}{f_1(\sqrt{(tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2})^{-1}})f_2(\sqrt{(tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2})^{-1}})}$$

$$\geqslant\sqrt{t(f_1(x_1))^{-2}+(1-t)(f_1(x_2))^{-2}}\sqrt{t(f_2(x_1))^{-2}+(1-t)(f_2(x_2))^{-2}}$$

$$\geqslant\sqrt{\frac{1}{t(f_1(x_1)f_2(x_1))^{2}+(1-t)(f_1(x_2)f_2(x_2))^{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{t[1/f_1(x_1)f_2(x_1)]^{-2}+(1-t)[1/f_1(x_2)f_2(x_2)]^{-2}}}$$

故 $\frac{1}{f_1(x)f_2(x)}$ 为 I 上的调和平方凹函数.

用数学归纳法可证明

推论　若 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $I\subseteq(0,+\infty)$ 上正的调和平方凸函数,则函数 $1\Big/\prod_{i=1}^{n}f_i(x)$ 是 I 上的调和平方凹函数.

定理 8　设 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $I\subseteq(0,+\infty)$ 上的调和平方凸函数,则函数 $\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$ 是 I 上的调和平方凸函数.

证明　由 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $I\subseteq(0,+\infty)$ 上的调和平方凸函数知,$\forall x_1,x_2\in I$ 及 $\forall t\in[0,1]$,有

$$f_i\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{1}{t(f_i(x_1))^{-2}+(1-t)(f_i(x_2))^{-2}}},(i=1,2,\cdots,n),$$

将上列 n 个等式相加,并应用 Minkowski 不等式[6],得

$$\sum_{i=1}^{n}f_i\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{t(f_i(x_1))^{-2}+(1-t)(f_i(x_2))^{-2}}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[(t^{-1/2}f_i(x_1))^{-2}+((1-t)^{-1/2}f_i(x_2))^{-2}]^{-1/2}$$

$$\leqslant[(\sum_{i=1}^{n}t^{-1/2}f_i(x_1))^{-2}+(\sum_{i=1}^{n}(1-t)^{-1/2}f_i(x_2))^{-2}]^{-1/2}$$

$$=[(\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1))^{-2}+(1-t)(\sum_{i=1}^{n}f_i(x_2))^{-2}]^{-1/2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{t(\sum_{i=1}^{n}f_i(x_1))^{-2}+(1-t)(\sum_{i=1}^{n}f_i(x_2))^{-2}}}$$

故,函数 $\sum_{i=1}^{n}f_i(x)$ 是 $I\subseteq(0,+\infty)$ 上的调和平方凸函数.

定理 9　设 $M,I\subseteq(0,+\infty)$,$f:I\to M$,那么

(ⅰ)若 $y=f(x)$ 为 I 上严格递增的调和平方凸函数,则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 为 M 上的调和平方凹函数;

(ⅱ)若 $y=f(x)$ 为 I 上严格递增的调和平方凹函数,则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 为 M 上的调和平方凸函数;

(ⅲ)若 $y=f(x)$ 为 I 上严格递减的调和平方凸

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

函数,则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 为 M 上的调和平方凸函数;

(iv) 若 $y=f(x)$ 为 I 上严格递减的调和平方凹函数,则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 为 M 上的调和平方凹函数.

证明 仅证(ⅰ),同样的方法可证明(ⅱ)、(iii)、(iv).

因为 $y=f(x)$ 在 I 上严格递增,所以,它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在 M 上严格递增,$\forall y_1,y_2\in M$,必存在 $x_1,x_2\in I$,使 $x_1=f^{-1}(y_1)$,$x_2=f^{-1}(y_2)$,即 $y_1=f(x_1)$,$y_2=f(x_2)$,

因为 $y=f(x)$ 为 I 上的调和平方凸函数,所以,$\forall t\in[0,1]$,有

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\leqslant\sqrt{\frac{1}{t(f(x_1))^{-2}+(1-t)(f(x_2))^{-2}}}=\sqrt{\frac{1}{ty_1^{-2}+(1-t)y_2^{-2}}}\qquad(6)$$

又 $\forall y_1,y_2\in M$,所以,$\sqrt{\frac{1}{ty_1^{-2}+(1-t)y_2^{-2}}}\in M$,且 $f\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\in M$,因此由 $y=f^{-1}(x)$ 在 M 上的严格单调递增和(6)式,即得

$$f^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{ty_1^{-2}+(1-t)y_2^{-2}}}\right)\geqslant\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}=\sqrt{\frac{1}{t(f^{-1}(y_1))^{-2}+(1-t)(f^{-1}(y_2))^{-2}}}$$

故 $y=f^{-1}(x)$ 为 M 上的调和平方凹函数.

定理 10 设 $B\subseteq I\subseteq(0,+\infty)$,$f(u)$ 是 I 上的正值函数,$A\subseteq R$,$\varphi:A\to B$,则

(ⅰ) 若 $y=f(u)$ 为 I 上严格递增的调和平方凸函数,$u=\varphi(x)$ 为 A 上的调和平方凹函数,则 $y=f(\varphi(x))$ 为 A 上的调和平方凹函数;

(ⅱ) 若 $y=f(u)$ 为 I 上严格递减的调和平方凹函数,$u=\varphi(x)$ 为 A 上的调和平方凸函数,则 $y=f(\varphi(x))$ 为 A 上的调和平方凸函数;

(iii) 若 $y=f(u)$ 为 I 上严格递减的调和平方凸函数,$u=\varphi(x)$ 为 A 上的调和平方凹函数,则 $y=f(\varphi(x))$ 为 A 上的调和平方凸函数;

(iv) 若 $y=f(u)$ 为 I 上严格递减的调和平方凹函数,$u=\varphi(x)$ 为 A 上的调和平方凸函数,则 $y=f(\varphi(x))$ 为 A 上的调和平方凹函数.

证明 仅证(ⅰ),同样的方法可证明(ⅱ)、(iii)、(iv).

$\forall x_1,x_2\in A$,$t\in[0,1]$,则,$\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\in[\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}]\subseteq A$,

因为 $\varphi:A\to B$,且 $B\subseteq I$,所以

$$\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\in B\subseteq I,$$

$$\sqrt{\frac{1}{t(\varphi(x_1))^{-2}+(1-t)(\varphi(x_2))^{-2}}}\in[\min\{\varphi(x_1),\varphi(x_2)\},\min\{\varphi(x_1),\varphi(x_2)\}]\subseteq B\subseteq I,$$

又 $u=\varphi(x)$ 是 A 上的调和平方凹函数,所以,

$$\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\geqslant\sqrt{\frac{1}{t(\varphi(x_1))^{-2}+(1-t)(\varphi(x_2))^{-2}}},$$

且 $y=f(u)$ 是 I 上严格递增的调和平方凹函数,所以

$$f\left[\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{tx_1^{-2}+(1-t)x_2^{-2}}}\right)\right]\geqslant f\left[\sqrt{\frac{1}{t(\varphi(x_1))^{-2}+(1-t)(\varphi(x_2))^{-2}}}\right]\geqslant\sqrt{\frac{1}{tf[\varphi(x_1)]^{-2}+(1-t)f[\varphi(x_2)]^{-2}}},$$

故 $y=f(\varphi(x))$ 为 A 上的调和平方凹函数.

2 Jensen 型不等式

定理 11 设 $f(x)$ 是区间 $I=[a,b]\subseteq(0,+\infty)$ 上的调和平方凸函数,$\forall x_i\in I$ 及 $\forall t_i\in(0,1)$,$(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$,则

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i^{-2}\right)^{-1/2}\right)\leqslant\left[\sum_{i=1}^{n}t_i(f(x_i))^{-2}\right]^{-1/2}.\qquad(7)$$

如果 $f(x)$ 是区间 I 上的调和平方凹函数,则不等式(7)中的不等号反向.

证明 令 $g(x)=[f(x^{-1/2})]^{-2}$($x\in[b^{-2},a^{-2}]$),因为 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的调和平方凸函数,所以,由定理 1 知,$g(x)$ 为 $[b^{-2},a^{-2}]$ 上的凹函数,利用凹函数的 Jensen 型不等式得

$$g\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i^{-2}\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}t_ig(x_i^{-2}),\ x_i\in[a,b],\ i=1,2,\cdots,n,$$

即 $$\left[f\left(\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i^{-2}\right)^{-1/2}\right)\right]^{-2}\geqslant\sum_{i=1}^{n}t_i[f((x_i^{-2})^{-1/2})]^{-2}=\sum_{i=1}^{n}t_i[f(x_i)]^{-2},$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

故　$f\left(\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^{-2}\right)^{-1/2}\right) \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} t_i \left[f(x_i)\right]^{-2}\right]^{-1/2}$.

用同样方法可以证明$f(x)$是区间 I 上的调和平方凹函数的情形.

定理 11 的一个等价形式即是

定理 12　设$f(x)$是$\mathbf{I} \subseteq (0, +\infty)$上的调和平方凸函数,则$\forall x_i \in \mathbf{I}$及$\forall p_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,n)$,有

$$f\left(\left[\sum_{i=1}^{n} \left(p_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} p_k\right) x_i^{-2}\right]^{-1/2}\right) \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \left(p_i \Big/ \sum_{k=1}^{n} p_k\right) \left(f(x_i)\right)^{-2}\right]^{-1/2} \tag{8}$$

如果$f(x)$是区间 I 上的调和平方凹函数,则不等式(8)中的不等号反向.

在定理 12 中,若$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$,则有

推论　设$f(x)$是$\mathbf{I} \subseteq (0, +\infty)$上的调和平方凸函数,则$\forall x_i \in \mathbf{I} (i = 1,2,\cdots,n)$,有

$$f\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}\right)^{-1/2}\right) \leqslant \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i)\right)^{-2}\right]^{-1/2}. \tag{9}$$

若$f(x)$是$\mathbf{I} \subseteq (0, +\infty)$上的调和平方凹函数,则不等式(9)中的不等号反向.

3　应用举例

例 1　设μ、a_i、$b_i (i = 1,2,\cdots,n)$均为正数,证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}\right)^{-1/2} + \mu \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{-2}\right)^{-1/2} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \mu b_i\right)^{-2}\right]^{-1/2}.$$

证明　设$f(x) = x + \mu (x > 0)$,则$f'(x) = 1$,$f''(x) = 0$,所以

$$6x\left(f'(x)\right)^2 + f(x)\left[3f'(x) - 2xf''(x)\right] = 9x + 3\mu > 0.$$

根据定理 4,$f(x) = x + \mu$是$(0, +\infty)$调和平方凸函数. 根据定理 11,$\forall x_i \in (0, +\infty)$及$\forall t_i \in (0,1)$,$(i = 1,2,\cdots,n)$,且$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$,得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^{-2}\right)^{-1/2} + \mu \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \left(x_i + \mu\right)^{-2}\right)^{-1/2}$$

令　$x_i = \dfrac{a_i}{b_i}$,$t_i = b_i^{-2} \Big/ \sum_{k=1}^{n} b_k^{-2}$,代入上式得,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{-2} \Big/ \sum_{k=1}^{n} b_k^{-2}\right)\right)^{-1/2} + \mu \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_i + \mu b_i\right)^{-2} \Big/ \sum_{k=1}^{n} b_k^{-2}\right)\right)^{-1/2},$$

即　$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}\right)^{-1/2} + \mu \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{-2}\right)^{-1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \mu b_i\right)^{-2}\right)^{-1/2}$.

当$\mu = 1$时,得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{-2}\right)^{-1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^{-2}\right)^{-1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i\right)^{-2}\right)^{-1/2} \tag{10}$$

注: 不等式(10)即为 Minkowski 不等式当幂指数$p = -2$时的具体结果.

例 2　设$x_i \in (0, +\infty)$,$t_i \in (0,1) (i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$\sqrt{1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i^{-2}} \leqslant \ln \sqrt{1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} t_i e^{-2x_i}}.$$

证明　设$f(x) = e^x (x > 0)$,则

$$6x\left(f'(x)\right)^2 + f(x)\left[3f'(x) - 2xf''(x)\right] = (3 + 4x)e^{2x} > 0,$$

根据定理 4,$f(x) = e^x$是调和平方凸函数. 由定理 11,$\forall x_i \in (0, +\infty)$及$\forall t_i \in (0,1)$,有

$$e^{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^{-2}\right)^{-1/2}} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} t_i \left(e^{x_i}\right)^{-2}\right]^{-1/2},$$

即　$\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i^{-2}\right)^{-1/2} \leqslant -\dfrac{1}{2}\ln \sum_{i=1}^{n} t_i e^{-2x_i} = \ln \sqrt{1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} t_i e^{-2x_i}}$.

综上,我们运用定理 1 至定理 10 可以判断给定的函数是否为调和平方凸函数. 于是,由定理 11、定理 12 可以得到一些新的不等式.

参　考　文　献

[1]　Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G., Inequalities [M]. Lundon: Cambridge University Press, 1952: 76 – 85.

[2]　Mitrinovic, D. S., Vasic, P. M., Analytic inequalities [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1970. 13 – 27.

[3]　王伯英. 控制不等式基础 [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1990. 35 – 54.

[4]　匡继昌, 常用不等式(第四版) [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2010: 53 – 62.

[5]　罗朝阳, 关于 Cauchy 不等式及其应用的探讨 [J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2008, 27(2): 46 – 48.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[6] 罗俊丽,关于 Minkowski 不等式的一个新推广[J]. 延安大学学报(自然科学版),2006 25(2):12 – 13.

Harmonic Square Function and Jensen-Type Inequality

Song Zhenyun[1] Chen Shaoyuan[2]

(1. Mechanical and Electrical Engineering School, Hubei Polytechnic Institute, Xiaogan, Hubei 432000;
2. Dean's Office Hubei Polytechnic Institute, Xiaogan, Hubei 432000)

Abstract

After deeply studying the convexity properties of functions, the authors bring forward the concept of harmonic square function, give the theorem and the operational properties, and set up the Jensen-type inequality of harmonic square functions.

Key words: Harmonic Square Function, Theorem, Operational Property, Jensen-Type Inequality.

(上接第 4 页)

参 考 文 献

[1] Underwood Dudley. Elementary Number Theory(Second Edition). W. H. Freeman and Company, San Francisco. 1978.
[2] 柯召,孙琦. 数论讲义. 北京: 高等教育出版社,1986.
[3] 闵嗣鹤,严士健. 初等数论(第三版). 北京: 高等教育出版社,2003.

On Pythagorean Numbers with the Same Integer

Zhu Yixin

(School of Mathematical Sciences, Captial Normal University, Beijing 100048)

Abstract

We consider here conditions enforce different Pythagorean numbers having a common integer, and giving a nature integer k we may find k different kinds of Pythagorean number which having some common integer.

Key words: Pythagorean number

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net