DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.06.001

改进复合梯形求积公式

穆耶赛尔·艾合买提 阿布都热西提·阿布都外力*
(新疆大学数学与系统科学学院,新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要

文章针对复合梯形求积公式进行改进. 通过增减每个子区间的弓形面积达到改进复合梯形求积公式的目的. 数值实验表明,计算积分达到相同精度的情况下,改进的复合梯形公式比原始的复合梯形公式划分更少的区间. 理论分析和数值结果表明,该方法有一定的应用价值和推广意义.

关键词: 数值积分, 梯形公式, 弓形.
中图分类号: O241.82

0 引 言

在实际问题中常常需要计算积分. 目前求解该问题的公式主要有梯形公式,复合梯形公式[1,5-6],复合辛普森格式[2]和其他一些求积公式[1-4]. 梯形公式虽然计算过程简单,误差却较大. 复合梯形公式虽然有效地避免了这个问题,但计算量很大. 本文对数值积分提出了一种改进的复合梯形公式. 此公式在每个子区间上先求梯形面积,再求对应的弓形面积,弓形面积根据被积函数的凹凸性质来决定增减每个子区间的弓形面积,从而得到比较接近于准确解的数值. 此公式在每个子区间上只需求三个函数值,计算量跟复合辛普森公式接近,收敛速度快. 本文得到的数值结果与梯形公式,复合梯形公式,复合辛普森公式结果进行比较的数值结果表明,本文公式是求解数值积分的有效的方法之一,而且该方法有一定的应用价值和推广意义.

1 新格式的构造

实际问题当中常常需要计算积分. 用梯形公式求积虽然计算过程简单,但是误差较大. 为了提高精度,通常把区间分成若干子区间,再在每个子区间上用梯形公式求积.

收稿日期: 2016-03-06
* 通讯作者

设函数 $y=f(x)\in \mathbf{C}^2(a,b)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 将区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间. h 是 X 轴上的步长. $x_i=a+(i-1)h$, 其中 $i=1,\cdots,n$. 在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上有 $f(x_i)=y_i, f(x_{i+1})=y_{i+1}$.

在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上采用梯形公式,则得

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$
$$=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]+R_n(f). \quad (1)$$

复合梯形公式为

$$T_n=\frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i)+f(x_{i+1})]$$
$$=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(b)], \quad (2)$$

余项为

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\eta\in(x_i,x_{i+1}). \quad (3)$$

复合梯形公式的代数精度为 1,该公式是收敛且稳定的. 具体的证明过程已在文献[1]中给出,不再重述.

在上述条件下,在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上取 $x_{i+1/2}=(x_i+x_{i+1})/2$,则有 $f(x_{i+1/2})=y_{i+1/2}$. 假设 (x_i,y_i), $(x_{i+1/2},y_{i+1/2})$, (x_{i+1},y_{i+1}) 是不共线的三个点,因为由不在同一条直线上的三个点可以确定一个圆,在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上设定 (A,B) 是通过这三个点而形成的圆的圆心且 R 为该圆的半径. 则在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上该圆的方程为

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2. \tag{4}$$

该方程满足

$$\begin{cases}(x_i-A)^2+(y_i-B)^2=R^2\\(x_{i+\frac12}-A)^2+(y_{i+\frac12}-B)^2=R^2,\\(x_{i+1}-A)^2+(y_{i+1}-B)^2=R^2\end{cases} \tag{5}$$

从而得到

$$B=\frac{2y_{i+\frac12}^2-y_{i+1}^2-y_i^2-\frac{h^2}{2}}{4y_{i+\frac12}-2y_{i+1}-2y_i},$$

$$A=\frac{(y_{i+\frac12}-y_i)[y_{i+\frac12}+y_i-2B]}{h}+\frac{h}{4}+x_i, \tag{6}$$

则有 $$R^2=(x_i-A)^2+(y_i-B)^2. \tag{7}$$

用梯形公式来求 $f(x)$ 在小区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 由 X 轴来围成的区域的面积,有

$$S_i=\frac{h}{2}(y_i+y_{i+1}). \tag{8}$$

下面求弓形面积,并根据函数的凹凸性,确定补充面积的加减规则. 考虑两种情况:

1) 当 $\frac{y_i+y_{i+1}}{2}<y_{i+\frac12}$ 时,函数在这单元上是凸函数. 那么

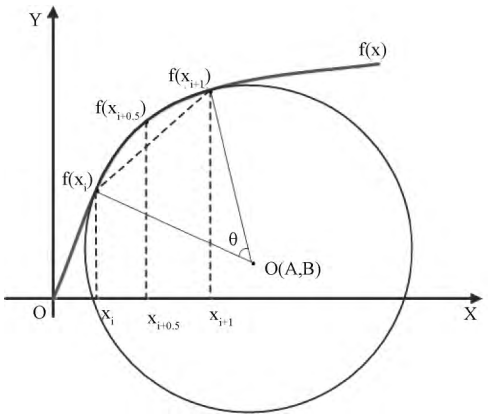


图 1

$$\cos(\theta)=1-\frac{h^2+(y_{i+1}-y_i)^2}{2R^2},$$

则有

$$\theta=\arccos\left[1-\frac{h^2+(y_{i+1}-y_i)^2}{2R^2}\right],$$

$$S_{\text{扇}}=\frac{\theta\pi R^2}{2\pi},\quad S_{\triangle}=\frac{1}{2}R^2\sin(\theta),$$

$$S_{tixing}=\frac{(y_i+y_{i+1})h}{2}.$$

则有

$$S=\frac{(y_i+y_{i+1})h}{2}+\left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi}-\frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right].$$

2) 当 $\frac{y_i+y_{i+1}}{2}>y_{i+\frac12}$ 时,函数在这单元上是凹函数. 那么

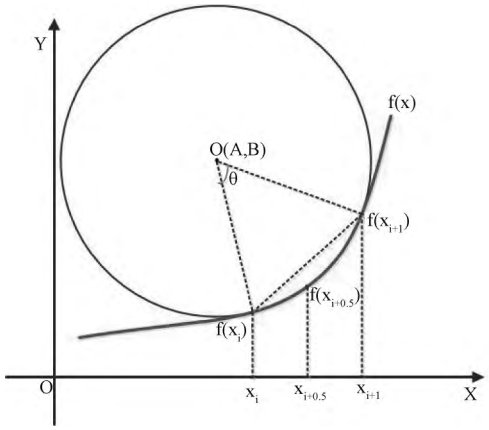


图 2

$$\cos(\theta)=1-\frac{h^2+(y_{i+1}-y_i)^2}{2R^2},$$

则有

$$\theta=\arccos\left[1-\frac{h^2+(y_{i+1}-y_i)^2}{2R^2}\right],$$

$$S_{\text{扇}}=\frac{\theta\pi R^2}{2\pi},\quad S_{\triangle}=\frac{1}{2}R^2\sin(\theta),$$

$$S_{tixing}=\frac{(y_i+y_{i+1})h}{2}.$$

则有

$$S=\frac{(y_i+y_{i+1})h}{2}-\left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi}-\frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right].$$

综上,计算公式为

$$S=\frac{(y_i+y_{i+1})h}{2}\pm\left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi}-\frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right]. \tag{9}$$

即当函数在这单元上是凸函数时,取正符号. 当函数在这单元上是凹函数时,取负符号.

当 (x_i,y_i),$(x_{i+1/2},y_{i+1/2})$,(x_{i+1},y_{i+1}) 在同一条直线上时不存在上述的圆,这时只需要计算梯形面积即可.

2 稳定性和收敛性

本文公式包含复合梯形公式,先求梯形面积和弓形面积,弓形面积根据被积函数的凹凸性质来决定增减梯形面积来更有效地减小误差. 复合梯形公式(2)的求积系数都为正,因此复合梯形公式是稳

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定的. 因为本文公式是根据复合梯形公式的基础而构造的,因此本文公式也是稳定的.

当 $f(x) \in C[a,b]$ 时,复合梯形公式(2)可以改写为

$$T_n = \frac{1}{2}\left[\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right]. \quad (10)$$

当 $n \to \infty$ 时,上式收敛于 $\int_a^b f(x)\,dx$. 所以复合梯形公式收敛的,因此本文公式也是收敛的.

3　本文公式的余项

在小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上,当 $\frac{y_i + y_{i+1}}{2} < y_{i+\frac{1}{2}}$ 时,因为面积为 $S = \frac{(y_i + y_{i+1})h}{2} + \left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi} - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right]$,因此余项:

$$R_i(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i) - \left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi} - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right], \quad \eta \in (x_i, x_{i+1}). \quad (11)$$

当 $\frac{y_n + y_{n+1}}{2} > y_{n+\frac{1}{2}}$ 时,因为面积 $S = \frac{(y_i + y_{i+1})h}{2} - \left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi} - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right]$,

因此余项:

$$R_i(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i) + \left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi} - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right], \quad \eta \in (x_i, x_{i+1}). \quad (12)$$

总之,

$$R_i(f) = -\frac{h^3}{12}f''(\eta_i) \pm \left[\frac{\theta\pi R^2}{2\pi} - \frac{1}{2}R^2\sin(\theta)\right], \quad \eta \in (x_i, x_{i+1}). \quad (13)$$

即当函数在这单元上是凸函数时,取正符号. 当函数在这单元上是凹函数时,取负符号.

4　数值例子

设在区间 $[a,b]$ 上计算积分 $I = \int_a^b f(x)\,dx$,其中被积函数为 $f(x)$ 是已知的,为了进行数值实验,我们把区间 $[a,b]$ 分成为 n 等分,h 为步长.

例 1: $y = x^{3/2}, x \in [0,1]$,准确解为 0.4(见表 1).

例 2: $y = \arccos(x), x \in [0,1]$,准确解为 1(见表 2).

例 3: $y = \frac{\sin(x)}{x}, x \in [0,1]$ 设 $f(0) = 1$,准确解为 0.946 083 1(见表 3).

表 1

求积公式	区间个数	近似值	误差
复合梯形公式	1	0.5	0.1
	30	0.400 133 719 598 51	0.000 133 72
	50	0.400 048 558 422 60	4.8558e-005
	100	0.400 012 245 153 19	1.2245e-005
复合辛普森公式	2	0.400 431 916 044 99	4.3192e-004
	4	0.400 077 249 447 33	7.7249e-005
	6	0.400 028 116 005 42	2.8116e-005
	8	0.400 013 713 469 41	1.3713e-005
本文公式	2	0.400 173 115 725 20	1.7312e-004
	4	0.400 053 643 002 72	5.3643e-005
	6	0.400 022 445 502 54	2.24456e-005
	8	0.400 011 662 810 14	1.1663e-005

表 2

求积公式	区间个数	近似值	误差
复合梯形公式	1	0.785 4	0.214 6
	20	0.996 9	0.003 1
	30	0.998 3	0.001 7
	40	0.998 9	0.001 1
复合辛普森公式	2	0.985 72	0.014 284
	4	0.994 94	0.005 063 9
	6	0.997 24	0.002 758 5
	8	0.998 2	0.001 8
本文公式	2	0.992 97	0.007 034 6
	4	0.998 46	0.001 539 5
	6	0.999 39	0.000 607 52
	8	0.999 69	0.000 309 59

表 3

求积公式	区间个数	近似值	误差
复合梯形公式	1	0.920 735 492 403 95	0.025 347 607
	20	0.946 020 325 355 03	6.277 5e-005
	30	0.946 055 184 074 72	2.791 6e-005
	50	0.946 0730 313 718 6	1.006 9e-005
	100	0.946 080 560 625 73	2.539 4e-006
复合辛普森公式	2	0.946 086 933 951 79	3.833 9e-006
	4	0.946 083 310 888 47	2.108 9e-007
	6	0.946 083 117 842 87	1.784 3e-008
	8	0.946 083 085 384 95	1.461 51e-008
本文公式	2	0.946 088 887 021 18	5.787 0e-006
	3	0.946 084 216 708 00	1.116 7e-006
	6	0.946 083 141 917 49	4.191 7e-008
	8	0.946 083 093 001 76	6.998 2e-009

例 4: $y = \frac{1}{x}, x \in [1,3]$,准确解为 1.098 612 288 668 11(见表 4).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 4

求积公式	区间个数	近似值	误差
复合梯形公式	1	1.333 333 333 333 33	0.234 721 044 665 22
	10	1.101 562 326 562 33	0.002 950 037 894 22
	50	1.098 730 786 132 87	1.184 97e-004
	100	1.098 641 916 981 12	2.9628e-005
复合辛普森公式	2	1.100 000 000 000 00	0.001 387 711 331 89
	4	1.098 725 348 725 35	1.130 6e-004
	6	1.098 636 167 753 81	2.387 9e-005
	8	1.098 620 042 680 48	7.754 0e-006
本文公式	2	1.099 554 060 939 20	9.417 7e-004
	4	1.098 661 843 464 74	4.955 4e-005
	6	1.098 620 413 137 48	8.124 4e-006
	8	1.098 614 584 842 78	2.296 1e-006

5 分 析

从表 4 可以看出,复合梯形公式需要将积分区间 100 个等分才得到误差为10^{-5}的数值. 复合辛普森公式和本文公式只需要将积分区间 8 个等分就得到误差为10^{-6}的数值,因此本文公式不需要将积分区间等分较多的子区间. 通过上述的表 1 – 4 可知本文的优越性.

6 总 结

本文中提出了计算数值积分的一种改进的复合梯形公式,该公式很有效地减小了复合梯形公式本有的误差,而且在计算积分达到相同精度的情况下,计算量比复合梯形公式少,计算过程简单,计算速度更快.

参 考 文 献

[1] 李庆扬,王能超,易大义. 数值分析(第四版) [M]. 北京: 清华大学出版社,2008.

[2] 奚梅成. 数值分析方法 [M]. 北京: 中国科学技术大学出版社,1995.

[3] 蒋尔雄,赵风光. 数值逼近 [M]. 上海: 复旦大学出版社,2002.

[4] 牛磊. 数值积分的若干问题的研究 [D]. 合肥: 合肥工业大学,2007.

[5] 吕同斌. 复化梯形公式及其应用 [J]. 安徽水利水电职业技术学院学报,2002,2(4):56 – 59.

[6] 买买提热依木·玉努斯. 复合梯形公式在计算定积分中的应用 [J]. 新农村: 黑龙江,2010(7):103 – 103.

A Corrector Composite Trapezoidal Formula

Muyassar Ahmat Abdurixit Abduweli

(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046)

Abstract

In this article, the composite trapezoidal quadrature formula is improved. Make changes in each subinterval arch area to improve the composite trapezoidal quadrature formula. To achieve the same numerical accuracy, the difference of the improved compound trapezoid formula is much less than the original compound trapezoid formula. Theoretical analysis and numerical results show that the proposed method has certain application value and significance.

Key words: numerical integration, trapezoid formula, bow.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net