DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.06.003

与GH-凸函数有关的若干单调函数

时统业[1] 秦 华[1] 王 斌[2]
(1. 海军指挥学院信息系,江苏 南京 211800; 2. 海军蚌埠士官学校航海系,安徽 蚌埠 233012)

摘 要

由GH-凸函数的定义和积分不等式生成相关函数,通过研究它们的准线性或单侧导数,得到这些函数的单调性.

关键词: GH-凸函数,单调性,准线性,单侧导数.
中图分类号: O178

1 预备知识

定义1[1] 设$I\subseteq(0,+\infty)$,$f:I\to(0,+\infty)$,若对任意$x_1,x_2\in I$和任意$t\in(0,1)$,都有

$$f(x_1^t x_2^{1-t})\leqslant\frac{1}{t(f(x_1))^{-1}+(1-t)(f(x_2))^{-1}},\tag{1}$$

则称$f(x)$是区间I上的GH-凸函数;如果式(1)中的不等号反向,则称$f(x)$是区间I上的GH-凹函数.

引理1[2] 设$f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$为GH-凸(凹)函数,$x,y\in(a,b)$,则

(i) f在(a,b)内任意点处的单侧导数存在;

(ii) 当$y<x$时,有$\frac{yf'_-(y)}{f^2(y)}\leqslant(\geqslant)\frac{yf'_+(y)}{f^2(y)}\leqslant(\geqslant)\frac{xf'_-(x)}{f^2(x)}\leqslant(\geqslant)\frac{xf'_+(x)}{f^2(x)}$;

(iii) $\frac{xf'_+(x)}{f^2(x)}(\ln y-\ln x)\leqslant(\geqslant)\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\leqslant(\geqslant)\frac{yf'_-(y)}{f^2(y)}(\ln y-\ln x)$,

且等号恒成立当且仅当$f(x)=\frac{1}{c+d\ln x}$,c,d是常数.

为方便起见,对可积函数$f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$及任意$x,y\in[a,b]$,$x<y$,约定下面记号:

$$C(x,y;f)=\exp\left(\frac{\int_x^y f(t)\ln t\,dt}{\int_x^y f(t)\,dt}\right),$$

$$D(x,y;f)=\exp\left(\frac{\int_x^y \frac{f(t)}{t}\ln t\,dt}{\int_x^y \frac{f(t)}{t}\,dt}\right).$$

引理2[2] 设$f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$是GH-凸(凹)函数,则有

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant(\leqslant)(b-a)f[C(a,b;f)],$$

$$\int_a^b \frac{f(y)}{y}dy\geqslant(\leqslant)(\ln b-\ln a)f[D(a,b;f)].$$

引理3[3] 设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,若$f'_+(x)$或$f'_-(x)$对一切$x\in(a,b)$有一个单侧导数存在,且非负(允许$+\infty$),则$f(x)$单调递增.

2 主要结果及证明

定理1 设$f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$是连续的GH-凸(凹)函数,对任意$x,y\in[a,b]$,$x<y$,定义函数

$$\phi(x,y;f)=\frac{\int_x^y f(t)\,dt}{f[C(x,y;f)]}-(y-x),$$

$$\theta(x,y;f)=\frac{\int_x^y \frac{f(t)}{t}dt}{f[D(x,y;f)]}-(\ln y-\ln x),$$

则对任意$c\in(a,b)$,有

$$0\leqslant(\geqslant)\ \phi(a,c;f)+\phi(c,b;f)\leqslant(\geqslant)\phi(a,b;f),$$

收稿日期: 2015-10-26

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$0 \leqslant (\geqslant)\ \theta(a,c;f) + \theta(c,b;f) \leqslant (\geqslant)\ \theta(a,b;f)$.

证明　由引理 2 知 $\phi(x,y;f) \geqslant (\leqslant) 0$.

$$\phi(a,c;f) + \phi(c,b;f) - \phi(a,b;f) = \frac{\int_a^c f(t)\,dt}{f[C(a,c;f)]} + \frac{\int_c^b f(t)\,dt}{f[C(c,b;f)]} - \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{f[C(a,b;f)]}.$$

不妨设

$$\alpha = \frac{\int_a^c f(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\,dt},\quad \beta = \frac{\int_c^b f(t)\,dt}{\int_a^b f(t)\,dt},$$

则有 $\alpha+\beta=1$, 且 $C(a,b;f) = [C(a,c;f)]^{\alpha}[C(c,b;f)]^{\beta}$, 由 GH-凸(凹) 函数的定义得

$$f[C(a,b;f)] \leqslant (\geqslant) \left(\frac{\alpha}{f[C(a,c;f)]} + \frac{\beta}{f[C(c,b;f)]}\right)^{-1},$$

由此得

$$\frac{\int_a^c f(t)\,dt}{f[C(a,c;f)]} + \frac{\int_c^b f(t)\,dt}{f[C(c,b;f)]} \leqslant (\geqslant) \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{f[C(a,b;f)]},$$

也即

$$\phi(a,c;f) + \phi(c,b;f) \leqslant (\geqslant)\ \phi(a,b;f).$$

同理可证 $0 \leqslant (\geqslant)\ \theta(a,c;f) + \theta(c,b;f) \leqslant (\geqslant)\ \theta(a,b;f)$.

推论 1.1　设 $f:[a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的 GH-凸(凹) 函数, 则 $\phi(a,y;f)$ 和 $\theta(a,y;f)$ 在 $(a,b]$ 上单调递增(递减).

推论 1.2　设 $f:[a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的 GH-凸(凹) 函数, 则 $\phi(x,b;f)$ 和 $\theta(x,b;f)$ 在 $[a,b)$ 上单调递减(递增).

定理 2　设 $f:[a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的 GH-凸(凹) 函数, 对任意 $x \in (a,b]$, $f(x) \neq f(a)$, 则函数

$$\psi(x) = (\ln x - \ln a) f(a) f(x) \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{f(x) - f(a)} - \int_a^x \frac{f(t)}{t}dt.$$

在 $(a,b]$ 上单调递增(递减).

证明　对任意 $x \in (a,b)$,

$$\psi'_+(x) = \frac{f^2(a) f^2(x)}{x[f(x) - f(a)]^2}\left[\frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(x)} - \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)}(\ln x - \ln a)\right] \cdot \left[\ln\frac{f(x)}{f(a)} - \frac{f(x)}{f(a)} + 1\right],$$

由引理 1(iii) 有

$$\frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(x)} \leqslant (\geqslant) \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)}(\ln x - \ln a),$$

又因为当 $t>0$ 时, $\ln t \leqslant t-1$, 取 $t = \frac{f(x)}{f(a)}$ 得

$$\ln\frac{f(x)}{f(a)} - \frac{f(x)}{f(a)} + 1 \leqslant 0,$$

所以有 $\psi'_+(x) \geqslant (\leqslant) 0$, 由引理 3, $\psi(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调递增(递减).

推论 2.1　设 $f:[a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的 GH-凸(凹) 函数, 对任意 $x \in (a,b]$, 有 $f(x) \neq f(a)$, 则有

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t}dt \leqslant (\geqslant)\ (\ln b - \ln a) f(a) f(b) \frac{\ln f(b) - \ln f(a)}{f(b) - f(a)}. \tag{2}$$

证明　由 f 的连续性及导数定义得

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln f(x) - \ln f(a)}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f(a)},$$

从而 $\lim\limits_{x\to a+0}\psi(x) = 0$. 由定理 2, $\psi(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调递增(递减), 故有 $\psi(b) \geqslant (\leqslant) 0$, 由此即得式(2).

定理 3　设 $f:[a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的单调递增的 GH-凸(凹) 函数, 则函数

$$k(x) = f(a^t x^{1-t}) - \frac{1}{\frac{t}{f(a)} + \frac{1-t}{f(x)}}$$

在 $[a,b]$ 上单调递减(递增).

证明　对任意 $x \in (a,b)$,

$$k'_+(x) = \frac{1-t}{x}\left\{\frac{a^t x^{1-t} f'_+(a^t x^{1-t})}{f^2(a^t x^{1-t})} \cdot f^2(a^t x^{1-t}) - \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)} \frac{1}{\left[\frac{t}{f(a)} + \frac{1-t}{f(x)}\right]^2}\right\},$$

由引理 1(ii) 和 GH 凸(凹) 函数定义得

$$0 \leqslant \frac{a^t x^{1-t} f'_+(a^t x^{1-t})}{f^2(a^t x^{1-t})} \leqslant (\geqslant) \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)} \geqslant 0,$$

$$0 \leqslant f(a^t x^{1-t}) \leqslant (\geqslant) \frac{1}{\frac{t}{f(a)} + \frac{1-t}{f(x)}},$$

因此对任意 $x \in (a,b)$ 有 $k'_+(x) \leqslant (\geqslant) 0$, 由引理 3, $k(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减(递增).

定理 4　设 $f:[a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的单调递增的 GH-凸(凹) 函数, 则函数

$$h(x) = f(a^t x^{1-t})\left[\frac{t}{f(a)} + \frac{1-t}{f(x)}\right]$$

在 $[a,b]$ 上单调递减(递增).

证明　对任意 $x \in (a,b)$,

$$h'_+(x) = \frac{(1-t) f(a^t x^{1-t})}{x}\left\{f(a^t x^{1-t})\left[\frac{t}{f(a)} + \frac{1-t}{f(x)}\right]\frac{a^t x^{1-t} f'_+(a^t x^{1-t})}{f^2(a^t x^{1-t})} - \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)}\right\},$$

因为 $a^t x^{1-t} \leqslant x$, 由引理 1 有

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$0 \leqslant \frac{a^t x^{1-t} f'_+(a^t x^{1-t})}{f^2(a^t x^{1-t})} \leqslant (\geqslant) \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)} \geqslant 0,$$

又由 GH-凸(凹)函数定义得

$$f(a^t x^{1-t})\left[\frac{t}{f(a)} + \frac{1-t}{f(x)}\right] \leqslant (\geqslant) 1,$$

故对任意 $x \in (a,b)$,有 $h'_+(x) \leqslant (\geqslant) 0$,由引理3,$h(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减(递增).

定理5 设 $f: [a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的 GH-凸(凹)函数,则函数

$$u(x) = \int_a^x \frac{f^2(t)}{t}dt - (\ln x - \ln a) f(a) f(x)$$

在 $[a,b]$ 上单调递减(递增).

证明 对任意 $x \in (a,b)$,

$$u'_+(x) = \frac{f(a) f^2(x)}{x}\left[\frac{1}{f(a)} - \frac{1}{f(x)} - \frac{x f'_+(x)}{f^2(x)}(\ln x - \ln a)\right],$$

由引理1(iii)有 $u'_+(x) \leqslant (\geqslant) 0$,由引理3,$u(x)$ 在 (a,b) 上单调递减(递增).

推论5.1 设 $f: [a,b] \subseteq (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 是连续的 GH-凸(凹)函数,则有

$$\frac{1}{\ln b - \ln a}\int_a^b \frac{f^2(t)}{t}dt \leqslant (\geqslant) f(a) f(b).$$

参 考 文 献

[1] 陈少元. GH-凸函数及其 Jensen 型不等式[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2013,34(5):1-5.

[2] 时统业,李照顺,秦华. 与 GH-凸函数有关的若干积分不等式[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2016,37(3):1-3.

[3] 杨军. 用单侧导数判断函数的单调性[J]. 四川师范学院学报(自然科学版),2000,21(1):108-109.

Some Monotone Functions Related to GH-Convex Functions

Shi Tongye[1] Qin Hua[1] Wang Bin[2]

(1. Department of Information, PLA Naval Command College, Nanjing Jiangsu 211800;
2. Department of Navigation, PLA Bengbu Naval Petty Officer Academy, Bengbu Anhui 233012)

Abstract

Some functions related to the definition and integral inequalities for GH-convex functions are generated, their monotonicity is proved with quasilinearity and unilateral derivative.

Key words: GH-convex function, monotonicity, quasilinearity, unilateral derivative.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net