DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.06.009

Rabi 模型的分析与计算

张 盼 胡 洁
(首都师范大学物理系,北京 100048)

摘 要

Rabi 模型是量子光学的基础模型之一,它描述了一个二能级原子系统与腔内光场的相互作用. 但尽管 Rabi 模型在物理学中有重要地位,它并不能被精确解析求解. 通常的办法是将 Rabi 模型在旋波近似下转化为 JC 模型,则可以解析求解,然而 JC 模型只能描述量子光腔的强耦合作用,不能描述超强耦合作用. 在这个工作中,为了求解 Rabi 模型,我们采用 Phy. Rev. A,2012,86(1):2271 一文中的方法对其哈密顿量进行 $U = \exp[\lambda\sigma_x(a^+ + a)]$ 的幺正变换,忽略 a^+ 和 a 的高阶项,将其投影在 σ_z 的本征态上,其中 $\sigma_z|\pm z\rangle = \pm|\pm z\rangle$,得到一个类 JC 模型,再对所得哈密顿量进行分析,可以得出能量谱和波函数. 在 MATLAB 中进行数值模拟,将数值模拟的结果与解析结果进行对比,我们发现在低能级区物理图像吻合良好.

关键词: Rabi 模型, 幺正变换, 超强耦合.
中图分类号: O469

0 引 言

在物理学中,对微观世界的研究对基本物理的探究具有重要的科学意义,而且对材料的制备和实现量子器件有重要的作用. 光与物质相互作用的研究是物理中的老问题,又是近年来很热门的一个研究领域,而其中相互作用的关键是耦合强度. 在近些年物理的发展中,随着技术的提高,耦合强度已经可以跟光场频率在同一数量级上,达到了超强耦合. 在超强耦合这个领域中,发现了很多新奇的量子效应,例如在大失谐下超辐射现象、动力学不可逆性和量子混沌、实现了单光子态和 Fock 态的产生、实现了人工的单原子激光等[1]. 描述超强耦合作用下的模型和传统的光与物质相互作用的模型是不同的,而 Rabi 模型[2]就是描述在超强耦合下光与物质相互作用的最简单的模型.

1 模型与方法

Rabi 模型是量子光学的基础模型之一,它描述的是双能级系统与量子化的光场之间重要的相互作用. 其哈密顿量为

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} = \omega a^+ a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z + g\sigma_x(a^+ + a), \quad (1)$$

其中 a^+ 和 a 分别代表原子的产生湮灭算符,ω 为量子化的光子频率,$\sigma_i(i = x,y,z)$ 是 Pauli 自旋算符,Ω 是两个能级间的共振频率,g 是相互作用强度.

Rabi 模型是量子光学的基础,但尽管 Rabi 模型在物理学中有重要地位,它并没有被精确求解,因为很难找出除了能量外的第二个守恒量[3]. 众所周知的获得 Rabi 模型能量谱和波函数的方法是在有限维希尔伯特空间进行数值对角化,然而数值结果很难提炼出 Rabi 模型的物理意义,而且很难控制实验参数.

在分析中,为了克服上述问题,通常应用旋波近似来重写哈密顿量

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{JC}} = \omega a^+ a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z + g(\sigma_- a^+ + \sigma_+ a), \quad (2)$$

此为 Jaynes-Cummings 模型[4],可以很简单的在基 $\{|\uparrow,n\rangle, |\downarrow,n+1\rangle\}$ 中求解,JC 模型可以很好的解析二能级的原子核与光腔或微波腔的相互作用系统的动力学行为和能谱,也可以成功的描绘强耦合作用下的量子动力学,然而在最近当量子化光场与二能级原子实现超耦合相互作用时旋波近似被破坏,JC 模型失效,光与物质的相互作用应由 Rabi 模

收稿日期: 2016-01-11

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

型描述[4]. Irish 提出了用广义旋波近似去解决 Rabi 模型[1],这个方法可以成功的获得哈密顿量中的解析能谱,然而这种方法只能在 $\Omega < \omega$ 适用. Braak 用 Rabi 模型的 Z_2 对称获得它的解析解[5],这个结果与在所有频率下($\Omega < \omega, \Omega = \omega, \Omega > \omega$)的数值模拟都吻合,然而不幸的是该方法不适用于激发态能谱[6].

在这篇文章中,我们采用了一种简单直接的微扰技术去探讨 Rabi 模型的基态和激发态[2]. 首先我们将哈密顿量沿 y 轴做一个旋转得

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}} = \omega a^{+} a + \frac{1}{2}\Omega\sigma_z - g\sigma_x(a^{+} + a), \quad (3)$$

在 $U = \exp[\lambda\sigma_x(a^{+} - a)]$ 下做一个幺正变换,变换如下

$$U\boldsymbol{H}_{\mathrm{R}}U^{+} = \omega a^{+} a - (g + \omega\lambda)\sigma_x(a^{+} + a) + 2g\lambda + \omega\lambda^2 + \frac{1}{2}\Omega[-\sigma_z\cosh 2\lambda(a^{+} - a) + \mathrm{i}\sigma_y\sinh 2\lambda(a^{+} - a)]. \quad (4)$$

因为 $\cosh(y)$ 和 $\sinh(y)$ 分别是偶函数和奇函数,所以 $\cosh 2\lambda(a^{+} - a)$ 和 $\sinh 2\lambda(a^{+} - a)$ 可以被展开如下:

$$\cosh 2\lambda(a^{+} - a) = G_0(N) + G_1(N)a^{+2} + a^2G_1(N) + \cdots\cdots \quad (5)$$

$$\sinh 2\lambda(a^{+} - a) = F_1(N)a^{+} - aF_1(N) + F_2(N)a^{+2} - a^2F_2(N) + \cdots\cdots \quad (6)$$

其中 $G_i(N)$ 和 $F_i(N)$ 中 $N = a^{+}a$, λ 是无量纲参数,N 为光子数. 一般情况下,在 Rabi 模型下多光子过程是很弱的,所以 a 和 a^{+} 的高阶项可以忽略不计,因此,哈密顿量的形式变为

$$\boldsymbol{H}_E = \omega a^{+} a - (g + \omega\lambda)\sigma_x(a^{+} + a) + 2g\lambda + \omega\lambda^2 + \frac{1}{2}\Omega\{-\sigma_z G_0(N) + \mathrm{i}\sigma_y[F_1(N)a^{+} - aF_1(N)]\} \quad (7)$$

在 σ_z 的本征态中,$\sigma_z|\pm z\rangle = \pm|\pm z\rangle$,Pauli 算符变成 $\sigma_x = \sigma_{-} + \sigma_{+}$, $\sigma_y = -\mathrm{i}(\sigma_{-} - \sigma_{+})$,其中 $\sigma_{-} = |-z\rangle\langle+z|$, $\sigma_{+} = |+z\rangle\langle-z|$,因此在 σ_z 的表象下,哈密顿量变为

$$\boldsymbol{H}_E = \omega a^{+} a + \omega\lambda^2 + 2g\lambda + \frac{1}{2}\Omega G_0(N)\sigma_z + \left[g + \omega\lambda - \frac{1}{2}\Omega f_1(m,n)\right](\sigma_{+} a + \sigma_{-} a^{+}) + \left[g + \omega\lambda + \frac{1}{2}\Omega f_1(m,n)\right](\sigma_{-} a + \sigma_{+} a^{+}), \quad (8)$$

取 $g + \omega\lambda + \frac{1}{2}\Omega f_1(m,n) = 0$,有

$$g + \omega\lambda + \frac{\Omega\lambda}{n+1}\mathrm{e}^{-2\lambda^2}L_n^1(4\lambda^2) = 0 \quad (9)$$

所以 $\boldsymbol{H}_E = \omega a^{+} a + \omega\lambda^2 + 2g\lambda + \frac{1}{2}\Omega G_0(N)\sigma_z + R_r(\sigma_{+} a + \sigma_{-} a^{+})$,

其中 $R_r = 2(g - \omega\lambda)$, $g + \omega\lambda + \Omega\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda^2} = 0$,则有 $(\omega + \Omega\mathrm{e}^{-2\lambda^2})\lambda = -g$,

$$\lambda = \frac{-g}{\omega + \Omega\mathrm{e}^{\left[-2\left(\frac{g}{\omega+\Omega}\right)^2\right]}} \quad (10)$$

因此我们得基态能量

$$E_g = \langle\boldsymbol{H}_E\rangle = \omega\lambda^2 + 2g\lambda - \frac{1}{2}\Omega\mathrm{e}^{-2\lambda^2}. \quad (11)$$

激发态能量谱为

$$E_{\pm,n} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega + \omega\lambda^2 + 2g\lambda + \frac{1}{4}\Omega\mathrm{e}^{-2\lambda^2}[L_n(4\lambda^2) - L_{n+1}(4\lambda^2)] \pm \frac{\sqrt{\left\{\omega - \frac{1}{2}\Omega\mathrm{e}^{-2\lambda^2}[L_n(4\lambda^2) + L_{n+1}(4\lambda^2)]\right\}^2 + 4\left[(g + \omega\lambda)\sqrt{n+1} - \frac{\Omega\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda^2}}{\sqrt{n+1}}L_n^1(4\lambda^2)\right]^2}}{2}. \quad (12)$$

2 分析与讨论

我们将解析结果表示在下面的图中,其中红色直线代表 Rabi 模型数值解,蓝色实心点代表文中所得解析解. 所获得的基态能量和广义变分法获得的结果一致,这种方法也同样适用于计算激发态能量. 图 1 中,Rabi 模型的基态和激发态的能量是相互作用量 g 的函数,同时伴随 $\Omega = 0.5\omega$ (a), $\Omega = 1.0\omega$ (b) 和 $\Omega = 1.5\omega$ (c) 都被画在图中,同时与(19)和(20)式的数值模拟作比较,图中表示我们分析出来的能量谱包括基态和激发态都和实验上的数值模拟吻合良好($g \leqslant 0.5\omega$). 然而,这种结果适用于所有的参数值范围 $\Omega < \omega, \Omega = \omega, \Omega > \omega$. 在图 2 中画出能量谱作为共振频率 Ω 的函数,其中分别取 $g = 0.1\omega$ 和 $g = 0.3\omega$,对于广义的旋波近似,能量谱可以很好的与数值模拟吻合. 图 3 中画出 Rabi 模型基态和激发态下的平均光子数是共振频率 Ω 的函数,$g = 0.1\omega$ 时,在图像上上述所求数值解可以很好地

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

与解析解吻合.

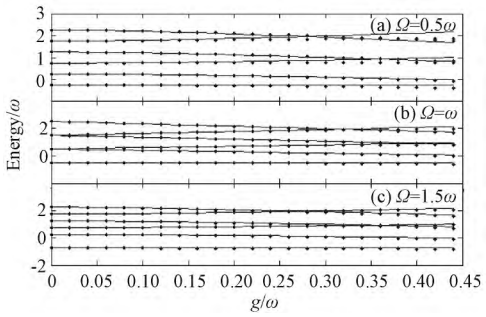


图 1　Rabi 模型基态和激发态的能量谱是相互作用强度 g 的函数(a) $\Omega = 0.5\omega$,(b) $\Omega = 1.0\omega$ 和(c) $\Omega = 1.5\omega$,最低的线表示的基态能量谱. 红色直线代表 Rabi 模型数值解,蓝色实心点代表文中所得解析解

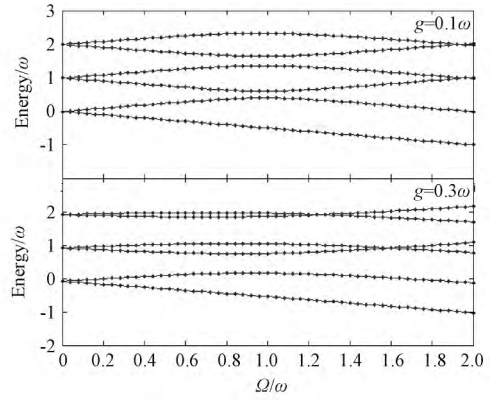


图 2　Rabi 模型基态和激发态的能量谱是共振频率 Ω 的函数,$g = 0.1\omega$ 和 $g = 0.3\omega$,最低的线代表基态能量谱,红色直线代表数值解,蓝色实心点代表文中所得解析解

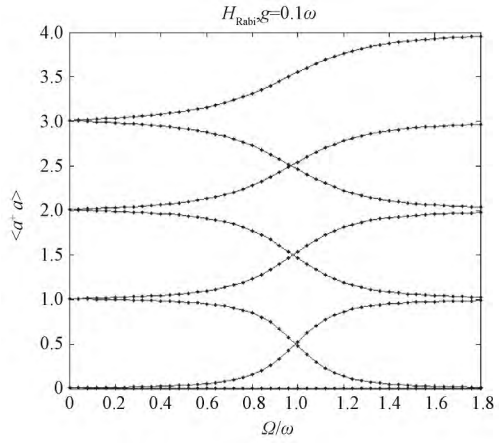


图 3　Rabi 模型基态和激发态下的平均光子数是共振频率 Ω 的函数,$g = 0.1\omega$,蓝色直线代表数值解,红色实心点代表文中所得解析解

3　总　结

综上所述,我们通过幺正变换把不可解的 Rabi 模型转化为可解的类 JC 模型. 基态和激发态的解析能谱和波函数都可很容易的获得. 而且,我们得到的结果和直接数值模拟的结果在很广的试验范围内都吻合,适用于二能级系统所有的共振频率包括复失谐 $\Omega < \omega$,共振 $\Omega = \omega$,尤其是正失谐 $\Omega > \omega$. 我们的结果也可以解释最近的在超强耦合下的实验观测. 但是当 Rabi 模型的耦合强度达到极深的程度,这时所有态都可能是简并的,对于简并的态,我们还需要进一步研究.

参　考　文　献

[1] 谭维翰. 量子光学导论[M]. 北京: 科学出版社,2012: 283.

[2] Yu L X,Zhu S Q,Liang Q F,et al. Analytical solutions for the Rabi model [J]. Phys Rev A,2012,86(1):015803.

[3] Werlang T,Dodonov A V, Duzzioni E I,et al. Rabi model beyond the rotating-wave approximation: Generation of photons from vacuum through decoherence [J]. Phys Rev A,2008,78(5): 053805.

[4] Scully M O, Zubairy M S. Quantum Optics [M]. 北京: 世界图书出版公司北京公司,2012: 145.

[5] Wolf F A,Vallone F,Romero G,et al. Dynamical correlation functions and the quantum Rabi model [J]. Phys Rev A, 2013,87(2):023835.

[6] Higgins K D B,Lovett B W,Gauger E M. Quantum thermometry using the ac Stark shift within the Rabi model [J]. Phys Rev B,2013,88(15):155409.

(下转第 40 页)

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Resistance Formulae of a Multipurpose *n*-step Honeycomb Network of Resistors

Tan Zhizhong

(Department of Physics, Nantong University, Nantong Jiangsu 226019)

Abstract

We consider a multipurpose *n*-step honeycomb network which is a profound problem, it has not been resolved before. The network contains a number of different types of resistor network model. This problem is resolved by four steps. First of all, we simplify a complex graphics into a simple equivalent model, then using Kirchhoff's laws to analyse the network and establishing a nonlinear difference equation model. Third, we construct the method of equivalent transformation to obtain the general solution of the nonlinear difference equation. Finally, we creat a new concept of negative resistance for the needs of the equivalent conversion. In this paper, we obtain two general resistance formulae of a multipurpose honeycomb network of resistors. As applications, several interesting specific results are produced. Our method and the results are suitable for the research of complex impedance network as well.

Key words: honeycomb network, equivalent transformation, nonlinear difference equation, Kirchhoff's laws, negative resistance.

(上接第 43 页)

The Analysis and Calculation of Rabi Model

Zhang Pan Hu Jie

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

The Rabi model is one of the basic models of quantum optics, which describes the interaction between a two-level atom and a cavity field. Although the Rabi model is important in physics, it cannot be solved analytically. The Rabi model usually is transformed into JC model under the rotating wave approximation for analytical analysis. The JC model only can describe the quantum dynamics of optical-cavity electrodynamics with strong coupling. However, it cannot describe solid-state quantum electrodynamics with ultrastrong coupling. In this work, in order to solve this problem, we transform the Rabi Hamiltonian under a unitary transformation with $U = \exp[\lambda\sigma_x(a^+ - a)]$ and neglect a^+ and a higher order terms. Mapping onto the eigenstates of σ_z with $\sigma_z|\pm z\rangle = \pm|\pm z\rangle$, we get the JC-like model. We analyze the obtained Hamiltonian, then we can get the energy spectrum and wave functions. This method was introduced in Phy. Rev. A, 2012, 86(1): 2271. We do numerical simulation in MATLAB, and compare with the analytical results, We find that the two physical images in the low level region are in good agreement.

Key words: Rabi model, unitary transformation, ultrastrong coupling.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net