DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.05.003

欧拉和两个新证明*

徐秋霞
(铜川职业技术学院基础部,陕西 铜川 727031)

摘 要

借助实分析及复分析等数学方法工具,给出欧拉和两种证法.

关键词: 欧拉和,函数项级数,一致收敛,留数定理.
中图分类号: O156.0

§0 引 言

欧拉和即为自然数平方倒数和: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, 17世纪下半叶当时欧洲一流的数学家也被困惑,是当时著名世界性的数学难题之一,当时与费尔马(Fermat P,1601~1665)大定理齐名,困扰时间达百年之久,1734年,一位师从约翰-伯努利的青年数学家欧拉(Euler L,1707~1783),凭借灵巧的技巧及类比思维方法,出人意料地一举解决了平方倒数求和这一世界性难题. 欧拉几种方法,个个美丽、深刻、奇巧,近现代学者给出了不少更严格的证明[2-5],我们在前人的基础上,利用实分析及复分析的方法,给出了欧拉和的两种新证法.

§1 利用函数项级数的一致收敛性及Wallis等式证明欧拉和

$x\in(0,1)$ 时$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的幂级数展开式[1]为:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots$$

对等式两边从0到x积分,注意到幂级数的逐项可积性与 $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

我们有

$$\arcsin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2n!!}\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2n!!}\frac{1}{(2n+1)^2}x^{2n+1}\quad(1)$$

由Abel第二定理[1],(1)式对一切$x\in[0,1]$皆成立. 特别地,取$x=1$,我们得到关于π的一个级数表达式:

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

此外,将$x=\sin t$带入(1)式

$$t-\sin t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2n!!}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin^{2n+1}t,\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

每一项在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上连续,由Weierstrass的M判别法[1]可知,任给$t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$函数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin^{2n+1}t$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上一致收敛于函数,逐项取积分,我们有,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t-\sin t)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{2n!!}\frac{1}{(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dx$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dx$$

收稿日期: 2016-01-30
* 国家自然科学基金项目(11201363),陕西省自然科学基金项目资助((09JK432)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由 Wallis 公式: $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\dfrac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\dfrac{1}{2m+1}=\dfrac{\pi}{2}$

可推得: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\,dx=\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, 我们立刻得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, 立即可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

§2　利用留数定理证明欧拉和

1. 引理　为了证明欧拉和需要下面的引理

引理　设函数 $f(z)$ 除有限个非整数极点 $b_k(k=1,2,L)$ 外在全平面解析,且

当 $|z|$ 充分大时,有 $|f(z)|<\dfrac{M}{|z|^{\alpha}}$(其中 M 和 a 为常数,且 $a>1$) ,则

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)=-\sum_{k}\operatorname{Res}[\pi\cot(\pi z)f(z),b_k]. \qquad (\mathrm{I})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n f(n)=-\sum_{k}\operatorname{Res}[\pi\csc(\pi z)f(z),b_k]. \qquad (\mathrm{II})$$

引理证明如下:

(1) 选择辅助函数 $F(z)=\pi\cot(\pi z)f(z)$. 显然,$F(z)$ 的奇点包括 $f(z)$ 的极点 b_k 及 $\cot(\pi z)$ 的极点

$$z=n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$$

(2) 选择围道积分回路,取正方形回路 L_N,如图 1 所示,围道与实轴的两个交点分别为 $\pm\left(N+\dfrac{1}{2}\right)$, 与虚轴的两个交点分别为 $\pm\left(N+\dfrac{1}{2}\right)i$,当 $N\to\pm\infty$ 时,所得的围道称为围道 L.

(3) 按留数定理[6] 计算积分

$$\oint_{L_N}\pi\cot(\pi z)f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{j=-N}^{N}\operatorname{Res}[\pi\cot(\pi z)f(z),j]+2\pi i\sum_{k}\operatorname{Res}[\pi\cot(\pi z)f(z),b_k]. \qquad (2)$$

首先计算(2) 式左边的积分. 为此,先证明在 L_N 上有

$$\cot(\pi z)<C(C\text{ 为与 }N\text{ 无关的常数}).$$

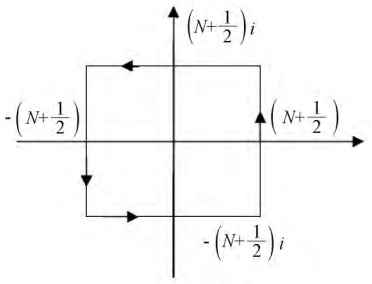


图 1　围道积分路径

现将 L 分成三个部分即 $y>\dfrac{1}{2}$, $y<-\dfrac{1}{2}$, $-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$ 三部分讨论,

(ⅰ) 当 $y>\dfrac{1}{2}$ 时,我们有 $e^{\pi y}>e^{-\pi y}$,将 $z=x+iy$ 代入 $\cot(\pi z)$ 可得

$$|\cot(\pi z)|=\left|\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\right|=\left|\frac{e^{i\pi(x+iy)}+e^{-i\pi(x+iy)}}{e^{i\pi(x+iy)}-e^{-i\pi(x+iy)}}\right|\leqslant\frac{|e^{i\pi(x+iy)}|+|e^{-i\pi(x+iy)}|}{||e^{-i\pi(x+iy)}|-|e^{i\pi(x+iy)}||}$$
$$=\frac{|e^{i\pi x-\pi y}|+|e^{-i\pi x+\pi y}|}{||e^{-i\pi x+\pi y}|-|e^{i\pi x-\pi y}||}\leqslant\frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}$$
$$=\frac{1+e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}}\leqslant\frac{1+e^{-2\pi\cdot\frac{1}{2}}}{1-e^{-2\pi\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{\pi}}$$
$$=\mathrm{B}(\text{常数}) \qquad (3)$$

(ⅱ) 当 $y<-\dfrac{1}{2}$ 时,我们有 $e^{\pi y}<e^{-\pi y}$,将 $z=x+iy$ 代入 $\cot(\pi z)$, 同理可得

$$|\cot(\pi z)|\leqslant\frac{e^{-\pi y}+e^{\pi y}}{e^{-\pi y}-e^{\pi y}}=\frac{1+e^{2\pi y}}{1-e^{2\pi y}}\leqslant\frac{1+e^{2\pi\cdot(-\frac{1}{2})}}{1-e^{2\pi\cdot(-\frac{1}{2})}}$$
$$=\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{\pi}}=\mathrm{B}(\text{常数}). \qquad (4)$$

(ⅲ) 当 $-\dfrac{1}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{1}{2}$,即在上图的围道回路 L_N 中的平行于虚轴且 $|y|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 的两小段,$z=\pm\left(N+\dfrac{1}{2}\right)+iy$, 有

$$|\cot(\pi z)|=\left|\cot\pi\left[\pm\left(N+\frac{1}{2}\right)+iy\right]\right|$$
$$=|\tan(i\pi y)|=|\operatorname{th}(\pi y)|$$
$$\leqslant\operatorname{th}\frac{\pi}{2}=\mathrm{C}(\text{常数}). \qquad (5)$$

综合(3) ,(4) ,(5) 式,可知 $\cot(\pi z)$ 在围道回路 L_N 上必小于常数 $\max(\mathrm{C},\mathrm{B})$.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由此得,当 $N\to\infty$ 时有

$$\oint_{L_N}\pi\cot(\pi z)f(z)\,dz \leqslant \pi\oint_{L_N}|\cot(\pi z)||f(z)||dz| \leqslant \pi\max(B,C)\frac{M}{\left(N+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}\cdot 8\left(N+\frac{1}{2}\right)\to 0. \tag{6}$$

考虑到围道上的 z 满足 $\left(N+\frac{1}{2}\right)\leqslant|z|\leqslant\sqrt{2}\left(N+\frac{1}{2}\right)$,分母上的 $|z|$ 已取最小值 $\left(N+\frac{1}{2}\right)$;围道回路的长度为 $\oint_{L_N}|dz|=8\left(N+\frac{1}{2}\right)$;再由定理的条件知 $a>1$,故当 $N\to\infty$ 时上式(6)趋于零. 其次,计算式(2)右边第一项的 $\sum_{j=-N}^{N}\mathrm{Res}F(n)$. 由于 $z=n=0,\pm1,L$ 是 $\cot(\pi z)$ 的一阶极点,而 $f(z)$ 只有有限个非整数极点 $b_k(k=1,2,L)$,故 $z=n$ 必为 $F(z)=\pi\cot(\pi z)f(z)$ 的一阶极点. 故 $F(z)$ 在 $z=n$ 点的留数和为

$$\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{Res}F(n)=\sum_{n=-N}^{N}\lim_{z\to n}\frac{\pi\cos(\pi z)f(z)}{[\sin(\pi z)]'}=\sum_{n=-N}^{N}\lim_{z\to n}\frac{\pi\cos(\pi z)f(z)}{\pi\cos(\pi z)}=\sum_{n=-N}^{N}f(n). \tag{7}$$

最后,将(6)和(7)式代入(2)式,并令 $N\to\infty$,即有

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=-\sum_{k}\mathrm{Res}F(b_k)=-\sum_{k}\mathrm{Res}\,[\pi\cot(\pi z)f(z),b_k].$$

(Ⅰ)式证明完毕,用类似的方法可证明(Ⅱ)式.

2. 定理的证明

由于 $z=0$(整数)是 $f(z)=\frac{1}{z^2}$ 的二阶极点,不满足定理的条件. 在这时 $z=0$ 是 $F(z)=\pi\cot(\pi z)f(z)$ 的三阶极点,它在 $z=0$ 的留数不能按(7)式算. 但(2)式,(6)式,以及当 $n\neq0$ 时的(7)式的结论仍可用. 用这三个公式计算级数和. 由(6)式可知,(2)式左边仍为零;又由 $f(z)$ 除 $z=0$ 外在全平面没有其他奇点,故(2)式右边的第二项也为零. 由此得

$$0=2\pi i\sum_{n=-\infty}^{-1}f(n)+2\pi i\mathrm{Res}F(0)+2\pi i\sum_{n=-1}^{+\infty}f(n).$$

由于 $f(n)$ 为偶函数,故上式右边的第一项与第三项相等,合并后移项即有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{1}{2}\mathrm{Res}F(0). \tag{8}$$

现在将 $F(z)$ 在 $z=0$ 的无心邻域展开为洛朗级数,有三种方法:

(1)利用 $\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$.

$$F(z)=\pi\cot(\pi z)f(z)=\frac{\pi}{z^2}\frac{1}{\tan(\pi z)}=\frac{\pi}{z^2}\frac{1}{(\pi z)+\frac{1}{3}(\pi z)^3+\frac{2}{15}(\pi z)^5+\cdots}=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}(\pi z)^2+\frac{2}{15}(\pi z)^4+\cdots}$$

设其分母的因子为 $1+\frac{1}{3}(\pi z)^2+\frac{2}{15}(\pi z)^4+\cdots=1+Z$,则

$$F(z)=\frac{1}{z^3}\frac{1}{1+Z}=\frac{1}{z^3}(1-Z+Z^2-Z^3+\cdots)=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{3}(\pi z)^2+\left(\frac{-2}{15}+\frac{1}{9}\right)(\pi z)^4+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2}{3}\frac{1}{z}-\frac{\pi^4}{45}z^2+\cdots.$$

(2)

$$F(z)=\pi\cot(\pi z)f(z)=\frac{\pi}{z^2}\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}=\frac{1}{z^3}\frac{1-\pi^2z^2/2+\cdots}{(1-\pi^2z^2/6+\cdots)}=\frac{1}{z^3}(1-\pi^2z^2/2+\cdots)(1+\pi^2z^2/6+\cdots)=\frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{3}\pi^2z^2+\left(\frac{-2}{15}+\frac{1}{9}\right)\pi^4z^4+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2}{3}\frac{1}{z}-\frac{\pi^4}{45}z^2+\cdots.$$

(取分母的 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}z^{2k}=\omega$,由于在 $z=0$ 的无心邻域中 ω 是高阶小量,由 $\frac{1}{1-\omega}=1+\omega$)

(3)由于 $\cot z=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3+\cdots(0<|z|<\pi)$.

$$F(z)=\pi\cot(\pi z)f(z)=\frac{\pi}{z^2}\left(\frac{1}{\pi z}-\frac{1}{3}\pi z-\frac{1}{45}\pi^3z^3+\cdots\right)=\frac{1}{z^3}-\frac{\pi^2}{3}\frac{1}{z}-\frac{\pi^4}{45}z^2+\cdots.$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

由上可得

$$\operatorname{Res}F(0) = -\frac{\pi^2}{3}. \tag{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

将(9)式代入(8)式,即有

参 考 文 献

[1] 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程 [M]. 北京: 高等教育出版社,2006.

[2] 刘证. Wallis 公式的一个新证明注记 [J]. 高等数学研究,2005(1):14 - 16.

[3] 黄炜. 欧拉和新证明 [J]. 内蒙古师范大学(自然科学版),2011,40(3):239 - 242.

[4] 张素玲,李晓爱. 关于 Bernoulli 级数和的一个新证明 [J]. 高等数学研究,2007(4):7 - 15.

[5] Jeffrey E. Steif. The T, T^{-1} - process, finitary codings and weak Bernoulli [J]. Israel Journal of Mathematics,2001,125(1):29 - 43.

[6] 余家荣. 复变函数(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社,2003.

New Proof of the Euler Sum

Xu Qiuxia

(Department of Basis, Tongchuan Vocational and Technical College, Tongchuan Shaanxi 727031)

Abstract

By using the methods of real analysis and complex analysis, two methods of proof for the Euler sum are obtained.

Key words: sum of Euler, functions series, the same convergence, residue theorem.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net