DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.03.001

与 GH 凸函数有关的若干积分不等式

时统业 李照顺 秦 华

(海军指挥学院信息系,江苏南京 211800)

摘 要

利用 GH 凸函数与 GA 凸函数的关系,证明了 GH 凸函数存在单侧导数,并通过不等式建立了 GH 凸函数与其单侧导数的联系. 用普通数学分析的方法建立了若干 GH 凸函数的不等式.

关键词: GH 凸函数,积分不等式,单侧导数.

中图分类号: O178

利用自变量某种平均的函数值与函数值的某种平均的关系可定义不同类型的凸函数. 例如,利用自变量的算数平均的函数值与函数值的算数平均的关系可定义通常的凸函数[1],利用自变量的几何平均的函数值与函数值的算数平均的关系可定义 GA 凸函数[2-4]. 最近,文献[5]利用自变量的几何平均的函数值与函数值的调和平均的关系引入 GH 凸函数.

定义 1[5] 设 $I\subseteq(0,+\infty)$,$f:I\to(0,+\infty)$,若对任意 $x_1,x_2\in I$ 和任意 $t\in(0,1)$,都有

$$f(x_1^t x_2^{1-t})\leqslant\frac{1}{t(f(x_1))^{-1}+(1-t)(f(x_2))^{-1}},\tag{1}$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的 GH 凸函数;如果式(1)中的不等号反向,则称 $f(x)$ 是区间 I 上的 GH 凹函数.

引理 1[5] 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$ 上的正值函数,则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 GH 凸(凹)函数的充要条件是:$g(x)=(f(x))^{-1}$ 是 $[a,b]$ 上的 GA 凹(凸)函数.

引理 2[4] 设 $f:I\subseteq(0,+\infty)\to\mathrm{R}$ 为 GA 凸函数,则 f 在任意 $x\in I$ 处的单侧导数存在,且 $f'_+(x)\geqslant f'_-(x)$.

引理 3[6] 设 $f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to\mathrm{R}$ 为 GA 凸函数,则

(i) $xf'_+(x)$ 和 $xf'_-(x)$ 在 (a,b) 单调不减;

(ii) 对任意 $x,y\in(a,b)$,有

$$yf'_+(y)(\ln x-\ln y)\leqslant f(x)-f(y)\leqslant xf'_-(x)(\ln x-\ln y),$$

且等号恒成立当且仅当 $f(x)=c+d\ln x$,c,d 是常数.

引理 4 设 $f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to\mathrm{R}$ 为 GA 凹函数,$x,y\in(a,b)$,则

(i) f 在 (a,b) 内任意点处的单侧导数存在;

(ii) 当 $y<x$ 时,有 $xf'_+(x)\leqslant xf'_-(x)\leqslant yf'_+(y)\leqslant yf'_-(y)$;

(iii) $xf'_+(x)(\ln x-\ln y)\leqslant f(x)-f(y)\leqslant yf'_-(y)(\ln x-\ln y)$,

且等号恒成立当且仅当 $f(x)=c+d\ln x$,c,d 是常数.

证明 因 f 是 $[a,b]$ 上的 GA 凹函数,所以 $g(x)=-f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 GA 凸函数. 对 $g(x)$ 使用引理 2 和引理 3 可证得引理 4.

引理 5 设 $f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to\mathrm{R}$ 为 GH 凸(凹)函数,$x,y\in(a,b)$,则

(i) f 在 (a,b) 内任意点处的单侧导数存在;

(ii) 当 $y<x$ 时,有 $\dfrac{yf'_-(y)}{f^2(y)}\leqslant(\geqslant)\dfrac{yf'_+(y)}{f^2(y)}\leqslant(\geqslant)\dfrac{xf'_-(x)}{f^2(x)}\leqslant(\geqslant)\dfrac{xf'_+(x)}{f^2(x)}$;(2)

(iii) $\dfrac{xf'_+(x)}{f^2(x)}(\ln y-\ln x)\leqslant(\geqslant)\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{f(y)}\leqslant(\geqslant)\dfrac{yf'_-(y)}{f^2(y)}(\ln y-\ln x)$,(3)

且等号恒成立当且仅当 $f(x)=\dfrac{1}{c+d\ln x}$,c,d 是常数.

收稿日期:2015-07-06

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明 (i) 当 f 是 $[a,b]$ 上的 GH 凸(凹)函数时,由引理 1 知 $g(x)=(f(x))^{-1}$ 是 $[a,b]$ 上的 GA 凹(凸)函数,由引理 4 知 $g(x)$ 在 (a,b) 内单侧导数存在,而 $f(x)$ 是由 $\frac{1}{u}$ 与 $u=g(x)$ 复合而成,故 f 在 (a,b) 内任意点处的单侧导数存在.

(ii) 当 $y<x$ 时,由引理 3 和引理 4 得

$$xg'_+(x)\leqslant(\geqslant)xg'_-(x)\leqslant(\geqslant)yg'_+(y)\leqslant(\geqslant)yf'_-(y),$$

也即

$$-\frac{xf'_+(x)}{f^2(x)}\leqslant(\geqslant)-\frac{xf'_-(x)}{f^2(x)}\leqslant(\geqslant)-\frac{yf'_+(y)}{f^2(y)}\leqslant(\geqslant)-\frac{yf'_-(y)}{f^2(y)},$$

由此证得式(2)成立.

(iii) 由引理 3 和引理 4,对任意 $x,y\in(a,b)$,有

$$xg'_+(x)(\ln x-\ln y)\leqslant(\geqslant)g(x)-g(y)\leqslant(\geqslant)yg'_-(y)(\ln x-\ln y),$$

且等号恒成立当且仅当 $g(x)=c+d\ln x$,c,d 是常数. 也即

$$-\frac{xf'_+(x)}{f^2(x)}(\ln x-\ln y)\leqslant(\geqslant)\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(y)}\leqslant(\geqslant)-\frac{yf'_-(y)}{f^2(y)}(\ln x-\ln y),$$

由此证得式(3)成立.

本文的目的是仿照文献[7]研究凸函数的不等式和文献[4]研究几何凸函数、GA 凸函数不等式的方法,给出 GH 的若干不等式.

定理 1 设 $f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是可导的 GH 凸(凹)函数,且 f 严格单调,则

$$\int_a^b f^2(y)\,dy\leqslant(\geqslant)f\left[\exp\left(\frac{\int_a^b yf'(y)\ln y\,dy}{\int_a^b yf'(y)\,dy}\right)\right]\int_a^b f(y)\,dy, \tag{4}$$

$$\int_a^b f(y)\,dy\leqslant(\geqslant)(b-a)f\left[\exp\left(\frac{\int_a^b y\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy}{\int_a^b y\frac{f'(y)}{f(y)}dy}\right)\right], \tag{5}$$

且等号恒成立当且仅当 $f(x)=\frac{1}{c+d\ln x}$,c,d 是常数.

证明 由引理 5(iii),对任意 $x,y\in[a,b]$ 有

$$f^2(y)-f(x)f(y)\leqslant(\geqslant)yf'(y)(\ln y-\ln x)f(x), \tag{6}$$

式(6)对 y 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b f^2(y)\,dy-f(x)\int_a^b f(y)\,dy\leqslant(\geqslant)f(x)\cdot\left[\int_a^b yf'(y)\ln y\,dy-\ln x\int_a^b yf'(y)\,dy\right], \tag{7}$$

在式(7)中取

$$x=\exp\left[\frac{\int_a^b yf'(y)\ln y\,dy}{\int_a^b yf'(y)\,dy}\right],$$

因为 f 严格单调,所以在 (a,b) 上恒有 $f'(y)>0$ 或恒有 $f'(y)<0$,从而 $x\in(a,b)$,且

$$\int_a^b yf'(y)\ln y\,dy-\ln x\int_a^b yf'(y)\,dy=0,$$

于是由式(7)得到式(4). 由证明过程可知,式(4)等号成立当且仅当式(6)等号成立,即 $f(x)=\frac{1}{c+d\ln x}$,c,d 是常数.

由引理 5(iii),对任意 $x,y\in[a,b]$ 有

$$f(y)\leqslant(\geqslant)f(x)-\frac{yf'(y)}{f(y)}(\ln x-\ln y)f(x),$$

用证明式(4)的方法可证式(5),这里略去过程.

定理 2 设 $f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是可导的 GH 凸(凹)函数,且 f 严格单调,则

$$\int_a^b\frac{f^2(y)}{y}dy\leqslant(\geqslant)f\left[\exp\left(\frac{\int_a^b f'(y)\ln y\,dy}{f(b)-f(a)}\right)\right]\int_a^b\frac{f(y)}{y}dy; \tag{8}$$

$$\int_a^b\frac{f(y)}{y}dy\leqslant(\geqslant)(\ln b-\ln a)f\left[\exp\left(\frac{\int_a^b\frac{f'(y)}{f(y)}\ln y\,dy}{\ln f(b)-\ln f(a)}\right)\right], \tag{9}$$

且等号恒成立当且仅当 $f(x)=\frac{1}{c+d\ln x}$,c,d 是常数.

证明 由引理 5(iii),对任意 $x,y\in[a,b]$ 有

$$\frac{f^2(y)}{yf(x)}-\frac{f(y)}{y}\leqslant(\geqslant)f'(y)(\ln y-\ln x),$$

$$\frac{f(y)}{yf(x)}-\frac{1}{y}\leqslant(\geqslant)\frac{f'(y)}{f(y)}(\ln y-\ln x),$$

用证明式(4)的方法可证式(8)和式(9),这里略去过程.

定理 3 设 $f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 是 GH 凸(凹)函数,则有

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geqslant (\leqslant) f(\bar{x}) + \frac{\bar{x}}{(b-a)f(\bar{x})}$$

$$[f'_+(\bar{x}) - f'_-(\bar{x})]\int_a^{\bar{x}} (\ln\bar{x} - \ln x)\,dx \geqslant (\leqslant) f(\bar{x}), \tag{10}$$

其中

$$\bar{x} = \exp\left(\frac{\int_a^b f(x)\ln x\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}\right).$$

证明　由引理 5(iii),对任意 $x \in [a,b]$, $y \in (a,b)$,有

$$f^2(y) - f(x)f(y) \leqslant (\geqslant) yf'_-(y)\cdot(\ln y - \ln x)f(x), \tag{11}$$

式(11)对 x 在 $[a,y]$ 上积分得

$$f^2(y)(y-a) - f(y)\int_a^y f(x)\,dx \leqslant (\geqslant) yf'_-(y)\int_a^y (\ln y - \ln x)f(x)\,dx, \tag{12}$$

由引理 5(iii), $x \in [a,b]$, $y \in (a,b)$,有

$$f^2(y) - f(x)f(y) \leqslant (\geqslant) yf'_+(y)\cdot(\ln y - \ln x)f(x) \tag{13}$$

式(13)对 x 在 $[y,b]$ 上积分得

$$f^2(y)(b-y) - f(y)\int_y^b f(x)\,dx \leqslant (\geqslant) yf'_+(y)\int_y^b (\ln y - \ln x)f(x)\,dx, \tag{14}$$

式(12)、(14)相加得

$$f^2(y)(b-a) - f(y)\int_a^b f(x)\,dx \leqslant (\geqslant) yf'_-(y)\int_a^y (\ln y - \ln x)f(x)\,dx + yf'_+(y)\cdot\int_y^b (\ln y - \ln x)f(x)\,dx, \tag{15}$$

在式(15)中取 $y = \bar{x}$,则有 $\bar{x} \in [a,b]$,且

$$\int_y^b (\ln y - \ln x)f(x)\,dx = -\int_a^y (\ln y - \ln x)f(x)\,dx,$$

由式(15)得式(10)的第一个不等式,又由引理 5(ii)知 $f'_+(\bar{x}) \geqslant (\leqslant) f'_-(\bar{x})$,故式(10)的第二个不等式得证.

参 考 文 献

[1] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社,2006: 268.

[2] 华云. 关于 GA-凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 大学数学,2008,24(2): 147 - 149.

[3] 吴善和. GA-凸函数与琴生不等式[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),2004,22(2): 52 - 55.

[4] 张小明,褚玉明. 解析不等式新论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2009: 198; 12 - 13; 180.

[5] 陈少元. GH-凸函数及其 Jensen 型不等式[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2013,34(5): 1 - 5.

[6] 时统业,吴涵. GA 凸函数的若干不等式[J]. 湖南理工学院学报,2012,25(2): 7 - 10.

[7] Dragomir S S, Pearce C E M. Selected Topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications[OL], http://rgmia.vu.edu.au/SSDragomirweb.html.

Integral Inequalities Related to GH-Convex Functions

Shi Tongye　Li Zhaoshun　Qin Hua

(Department of Information, PLA Naval Command College, Nanjing　211800)

Abstract

With the aid of the relationship between GH-convex functions and GA-convex functions, the existence of unilateral derivatives of GH-convex functions is proved, and the relation between HG-convex function and its derivative is established through inequalities, then integral inequalities for GH-convex functions are obtained by using mathematical analysis.

Key words: GH-convex function, integral inequality, unilateral derivative.

作者简介　时统业(1963 -),男,河北张家口人,硕士,副教授,从事基础数学教学和研究.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net