DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.02.002

SIRS 传染病模型的稳定性分析*

王 茜 王婷婷

(北京邮电大学理学院,北京 100876; 山东鲁南机床有限公司,山东 滕州 277500)

摘 要

本文讨论了具有垂直传染、预防接种和饱和发病率的 SIRS 传染病模型. 得到了该模型的基本再生数,无病平衡点和地方病平衡点. 通过对基本再生数的讨论和分析,利用 Liapunov 函数方法、LaSalle 不变原理及 Hurwitz 引理证明了连续预防接种下无病平衡点和地方病平衡点的稳定性. 如果 $R_0 \leqslant 1$,无病平衡点全局渐近稳定,此时疾病将被根除; 如果 $R_0 > 1$,地方病平衡点局部渐近稳定,此时疾病将发展为地方病. 最后,通过数值模拟验证了所得结论的可靠性.

关键词: 传染病,饱和发病率,连续接种,平衡点,稳定性.
中图分类号: O175.13

1 引 言

近年来,随着环境的污染,生态环境的破坏,以及国际交流的日益频繁,许多传染病开始在人群中肆虐,给人们的身体和生活造成严重的影响. 2003 年的 SARS 事件是 21 世纪中国和世界面临的第一次公共卫生方面的重大挑战,成为当时国内外关注的焦点,引起了我国政府和 WHO 的关注. 同样,2009 年爆发的 H1N1 和 2013 年的 H7N9 禽流感成为公共卫生领域的又一次挑战. 而现今仍旧流行于西非地区的埃博拉病毒也再一次引起世界各国的高度警惕. 因此,研究传染病动力学模型具有十分重要的意义. 自从 1927 年 Kermac-Mckendric 提出开创性的 SIR 模型,在随后的几十年里人们建立了大量的传染病数学模型,并得到了很多重要的成果,随着模型建立中所考虑因素(如治疗,接种等)的日益全面,其研究成果也越来越符合实际. 在文献[1-3]中作者付景超等人考虑到了垂直传染,预防接种对传染病的影响,其中假设了对易感者新生儿进行预防接种,且接种所获得的免疫效果是暂时的,在现实中这可以有效地控制疾病的流行与传播,具有实际意义; 文献[7,8]中作者胡志兴等人考虑到了饱和发病率对疾病的影响,将线性的 βSI(染病周期所具传染率)用非线性的 $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ 代替,使模型考虑的因素更加全面,建立的更加完善. 还有些模型中,作者考虑到了阶段结构对传染病的影响,此类模型可参考文献[4-6].

本文根据[1,7]的建模思想,考虑了暂时免疫情况下具有连续预防接种的 SIRS 传染病模型. 文中引用了饱和发病率 $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$,$\beta$ 为有效接触常数,即传染率系数. I 变大时,$\frac{\beta I}{1+\alpha I}$ 接近饱和水平; 当疾病在人群中扩散时,βI 衡量着疾病的侵染能力; 当被感染人数增加时,疾病将会受到抑制的作用,其抑制力度由 $\frac{1}{1+\alpha I}$ 体现,其中 α 非负. 该模型考虑到了染病人群的行为变化和拥挤效应,并且通过选择合适的参数来防止接触率的无界性,因此使得模型更加合理. 另外,随着国际医疗水平的不断提高,完全可以实现对易感者及恢复着新生儿均进行预防接种,因此在本文中假设对易感者及恢复者的新生儿均进行预防接种,且获得的免疫是暂时的. 该模型可适用于乙肝等传染疾病的传播. 通过模型分别定义了模型的基本再生数 δR,研究了模型的渐近性态,得到了模型的无病平衡点和地方病平衡点,利用 Liapunov 方法、LaSalle 不变原理及 Hurwitz 引理证明了无病

收稿日期: 2015-04-01
* 国家自然科学基金(11471051,11371362)资助.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

平衡点和地方病平衡点的稳定性. 当 $R_0 \leqslant 1$ 时,无病平衡点全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点不稳定; 当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点局部渐近稳定.

2 预备知识

下面将文中要用到的定理及定义(参考文献[9])介绍如下.

2.1 平衡点的稳定性

先考虑一般二维系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y). \end{cases} \tag{1}$$

定义: 若点 (x_o,y_o),使 $P(x_o,y_o) = 0, Q(x_o,y_o) = 0$,则称 (x_o,y_o) 为系统(1)的平衡点.

引理: 当系统(1)的雅克比矩阵

$$J = \begin{pmatrix} P'_x(x_0,y_0) & P'_y(x_0,y_0) \\ Q'_x(x_0,y_0) & Q'_x(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

的所有特征值都有负实部时,系统(1)的平衡点 (x_o,y_o) 是渐近稳定的.

2.2 Hurwitz 定理

设给定常系数的 n 次代数方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{2}$$

其中 $a_0 > 0$,作行列式

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_n\Delta_{n-1},$$

其中 $a_i = 0$(对一切 $i > n$).

那么,方程(2)的一切根均有负实部的充分必要条件是不等式

同时成立:

$$a_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \cdots, \Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0.$$

2.3 Liapunov 函数及其稳定性理论

本文通过借助构造一个特殊的函数 $V(x,y)$,并利用函数 $V(x,y)$ 及其通过方程组 $\dfrac{dV(x,y)}{dt}$ 的全导数的性质来确定方程组的稳定性(这是 Liapunov 第二方法的思想),我们把具有此特殊性质的函数 $V(x,y)$ 称为李雅普诺夫函数,简称 V 函数.

定理: 考虑 n 维非线性驻定微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(x), f(x_0) = 0 \tag{3}$$

其中 $f: W \to R^n$ 连续可微,集合 $W \subset R^n$,如果 $U \subset W$ 是 x_0 的邻域,且有函数 $V: U \to R^1$,在 U 上可微,

(A1) $V(x_0) = 0; V(x) > 0 (x \neq X_0)$,(若函数 V 满足该条件,则称函数 V 为定正的; 如果函数 $-V$ 是定正的,则称 V 为定负的)

(A2) 当 $x \neq X_0$ 时, $\dfrac{dV(x(t))}{dt} \leqslant 0$,

(A3) 当 $x \neq X_0$ 时, $\dfrac{dV(x(t))}{dt} < 0$,

若函数 V 满足(A1),(A2),则称方程组(2.3)的零解 x_0 是稳定的;

若函数 V 满足(A1),(A3),则称方程组(2.3)的零解 x_0 是渐近稳定的.

2.4 Lasalle 不变集原理

设 V 是系统(2.3)的定义在开子集 $\Omega \subset W$ 内的一个 Liapunov 函数, V 在 $\bar{\Omega}$ 上连续,令 $E = \{x \in \overline{\Omega} \mid V' = 0\}$, M 是系统(2.3)在 E 中的最大不变集,从 Ω 内出发的任一正半轨 $\dfrac{dx}{dt} = g$, $\lim\limits_{x\to\infty} x(t) = E\Gamma_+(x_0)$ $(x_0 \in \Omega)$,恒在 Ω 中有界,则轨线 $\Gamma_+(x_0)$ 的 ω 极限集 $\omega(\Gamma_+(x_0)) \subset M$,且有 $\lim\limits_{x\to\infty} dist(x(t,x_0), M) = 0$.

3 具有垂直传染、预防接种和饱和发病率的 SIRS 传染病模型的稳定性分析

3.1 模型建立

根据疾病的传染机制图(1),本文做出如下假设及说明

(H1) S、I、R 分别表示易感者、染病者、恢复者.

(H2) 人口总数设为 N, $N = S + I + R$,且 S 与 R 的新生儿中未被预防接种的为易感者, I 新生儿中没有被垂直传染的部分为易感者.

(H3) b 为 S 和 R 的出生率和死亡率; b' 为 I 的出生率和自然死亡率; r 为恢复率系数; δ 是 R 的免疫失去率系数; q 是垂直传染率 $(p + q = 1)$, m 是对易感者及恢复着新生儿预防接种的比例.

(H4) $\dfrac{\beta SI}{1 + \alpha I}$ 为饱和发病率.

在上述假设的条件下,由疾病的传染机制图 1,我们很容易得到本文要研究的 SIRS 传染病动力学

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

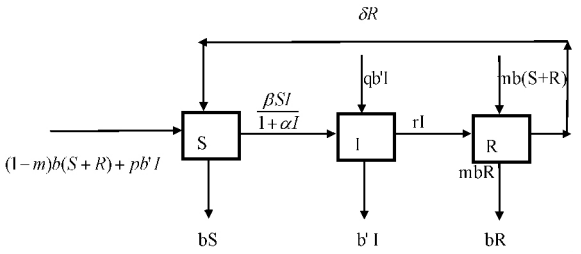


图 1　疾病的传染机制图

模型,即

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I} + (1-m)b(S+R) + pb'I - bS + \delta R,\\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\beta SI}{1+\alpha I} + qb'I - b'I - rI,\\ \dfrac{dR}{dt} = rI + mb(S+R) - bR - \delta R.\end{cases} \tag{4}$$

根据上述所建立的传染病动力学模型,下面我们将验证(4)平衡点的存在性.

3.2　平衡点的存在性

证　将(4)的三个方程相加得 $\dfrac{d(S+I+R)}{dt} = \dfrac{dN}{dt} = 0$,故总人数 N 为常数. 不妨设 $N = S+I+R = 1$,又 $p+q = 1$,则方程(4)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = -\dfrac{\beta SI}{1+\alpha I} - (\delta+b)S + (pb' - \delta - b + mb)I + (\delta + b - mb),\\ \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\beta SI}{1+\alpha I} - (pb'+r)I.\end{cases} \tag{5}$$

系统(5)的平衡点满足

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = 0,\\ \dfrac{dI}{dt} = 0.\end{cases}$$

(i) 当 $I = 0$ 时,方程(3.2)有平衡点 $E_0\left(\dfrac{\delta+b-mb}{\delta+b}, 0\right)$.

(ii) 当 $I \neq 0$ 时,由 $\dfrac{dI}{dt} = 0$ 得

$$S = \frac{(pb'+r)(1+\alpha I)}{\beta},$$

代入

$$\frac{dS}{dt} = 0,$$

得

$$I = \frac{\dfrac{\beta(\delta+b-mb)}{(\delta+b)(pb'+r)} - 1}{\alpha + \dfrac{\beta(\delta+b-mb+r)}{(\delta+b)(pb'+r)}}.$$

定义基本再生数 $R_0 = \dfrac{\beta(\delta+b-mb)}{(\delta+b)(pb'+r)}$,当 $R_0 > 1$ 时,有正平衡点

$$E_* = \left(\frac{(pb'+r)(1+\alpha I^*)}{\beta}, \frac{\dfrac{\beta(\delta+b-mb)}{(\delta+b)(pb'+r)} - 1}{\alpha + \dfrac{\beta(\delta+b-mb+r)}{(\delta+b)(pb'+r)}}\right) = (S^*, I^*).$$

与 E_0 对应的(3.1)的平衡点 $M_0\left(\dfrac{\delta+b-mb}{\delta+b}, 0, \dfrac{mb}{\delta+b}\right)$ 是无病平衡点;与 E_* 对应的(3.1)的平衡点 $M_*(S^*, I^*, 1-S^*-I^*)$ 是地方病平衡点. 证毕.

鉴于生态意义,我们只在 $\Omega = \{(S,I) \in R^2 : S \geqslant 0, I \geqslant 0, S+I \leqslant 1\}$ 内进行讨论.

根据上面的证明我们可得到如下定理:

定理 3.2　方程组(5)的平衡点为 $E_0\left(\dfrac{\delta+b-mb}{\delta+b}, 0\right)$,当且仅当 $R_0 > 1$ 时有正平衡点

$$E_* = \left(\frac{(pb'+r)(1+\alpha I^*)}{\beta}, \frac{R_0 - 1}{\alpha + \dfrac{\beta(\delta+b-mb+r)}{(\delta+b)(pb'+r)}}\right) = E_*(S^*, I^*).$$

有了以上准备我们可以给出并证明如下定理

3.3　平衡点的稳定性

定理 3.3.1　当 $R_0 \leqslant 1$ 时,系统(3.2)的平衡点 $E_0\left(\dfrac{\delta+b-mb}{\delta+b}, 0\right)$ 全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,$E_0\left(\dfrac{\delta+b-mb}{\delta+b}, 0\right)$ 不稳定.

证　系统(5)在平衡点 $E_0\left(\dfrac{\delta+b-mb}{\delta+b}, 0\right)$ 处的雅可比矩阵为

$$A_0 = \begin{pmatrix} -(\delta+b) & -\dfrac{\beta(\delta+b-mb)}{\delta+b} + (pb'-\delta-b+mb)\\ 0 & \dfrac{\beta(\delta+b-mb) - (\delta+b)(pb'+r)}{\delta+b}\end{pmatrix}$$

相应的特征值:

$$\lambda_1 = -(\delta+b), \lambda_2 = \frac{\beta(\delta+b-mb) - (\delta+b)(pb'+r)}{\delta+b} = \frac{R_0 - 1}{(pb'+r)(\delta+b)^2}.$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(i) 当 $R_0 \leqslant 1$ 时,有 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 \leqslant 0$,则 E_0 在区域 Ω 内局部渐近稳定.

构造李亚普诺夫函数 $V(t) = I(t)$,沿方程(3.2)轨线的导数为

$$\begin{aligned} V'(t) &= \left[\frac{\beta S}{1+\alpha I} - (pb'+r)\right] I \\ &= \left[\frac{\beta S - (pb'+r)(1+\alpha I)}{1+\alpha I}\right] I \\ &= \left[\frac{\beta(\delta+b-mb)}{\delta+b} - (pb'+r)(1+\alpha I)}{1+\alpha I}\right] I \\ &= \left[\frac{R_0 - (1+\alpha I)}{(1+\alpha I)(pb'+r)}\right] I \leqslant 0 \end{aligned}$$

所以,$I(t) \to 0 (t \to +\infty)$,则方程(3.2)的极限方程为 $\frac{dS}{dt} = -(b+\delta)S + (\delta + b - mb)$,解得 $S = ce^{-(b+\delta)S} + \frac{\delta+b-mb}{\delta+b}$;当 $t \to +\infty$ 时,$S \to \frac{\delta+b-mb}{\delta+b}$. 因为 $(S, I) \in \Omega$,由 Lasalle 不变集原理知,E_0 全局稳定.

(ii) 当 $R_0 > 1$ 时,有 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$,由此可知,此时 E_0 不稳定. 证毕.

定理 3.3.2 当 $R_0 > 1$ 时,系统的正平衡点 $E_*(S_*, I_*)$ 在区域 Ω 内局部渐近稳定.

证 系统(5)在平衡点 $E_*(S_*, I_*)$ 处的线性矩阵为

$$A_* = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} - (b+\delta) & -\frac{(pb'+r)}{1+\alpha I_*} + (pb' - \delta - b + mb) \\ \frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} & -\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} \end{pmatrix}$$

由 $|\lambda E - A_*| = 0$ 得

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + \left[\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + \frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} + b + \delta\right]\lambda + \\ &\left(\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} + b + \delta\right)\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + \\ &\left[\frac{pb'+r}{1+\alpha I_*} - (pb' - \delta - b + mb)\right]\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} = 0 \end{aligned}$$

记为 $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$,

设 A_* 的特征值为 λ_1, λ_2,则有 $\lambda_1 + \lambda_2 = -\left[\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + \frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} + b + \delta\right] < 0$,

又

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= \left(\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} + b + \delta\right)\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + \\ &\left[\frac{pb'+r}{1+\alpha I_*} - (pb' - \delta - b + mb)\right]\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} \\ &= \frac{pb'\alpha I_*\beta I_* + r\alpha I_*\beta I_*}{(1+\alpha I_*)^2} + (b+\delta)\cdot\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + \\ &\left[\frac{r - pb'\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + (\delta + b - mb)\right]\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} \\ &= \frac{r\alpha I_*\beta I_* + r\beta I_*}{(1+\alpha I_*)^2} + (b+\delta)\frac{(pb'+r)\alpha I_*}{1+\alpha I_*} + \\ &(\delta + b - mb)\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} > 0 \end{aligned}$$

其中由 $R_0 > 1$ 得 $\beta(\delta + b - mb) > (\delta + b)(pb' + r) > 0$,则 $\delta + b - mb > 0$,或由 $0 < \delta, b, m < 1$ 知 $\delta + b - mb > 0$,从而 $(\delta + b - mb)\frac{\beta I_*}{1+\alpha I_*} > 0$.

则 $a_0 = 1 > 0$,

$\Delta_1 = a_1 = -(\lambda_1\lambda_2) > 0$,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_1\lambda_2 > 0$

由 Hurwitz 定理可知,A_* 有两个负实部的特征值,所以正平衡点 $E_*(S_*, I_*)$ 在区域 Ω 内局部渐近稳定. 证毕.

4 数值模拟

为了验证定理 3.3.1 和定理 3.3.2 的可靠性,下面给出了两组数据,我们通过用 Matlab 做图来验证所得结果的真实性.(程序见附录)

(1) 令 $b = 0.2, \beta = 0.2, \delta = 0.3, \alpha = 0.5, b' = 0.5, r = 0.4, p = 0.01, m = 0.5$. 经计算可得 $R_0 = 0.3951 < 1$,通过定理 3.3.1 可知无病平衡点全局渐近稳定,此时疾病将被根除(见图 2,图 3).

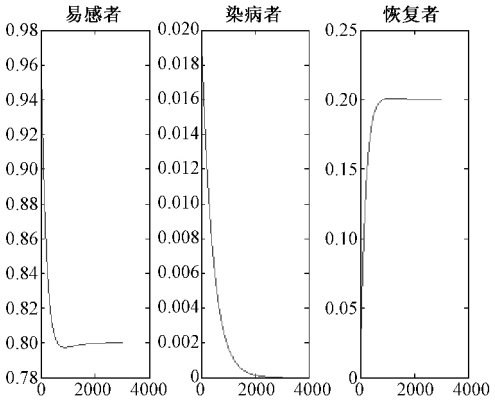


图 2

(2) 令 $b = 0.2, \beta = 0.5, \delta = 0.1, \alpha = 0.3, b' =$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

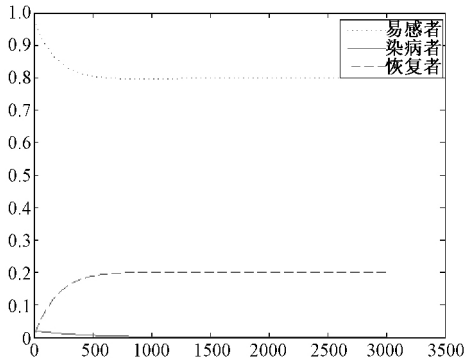


图 3

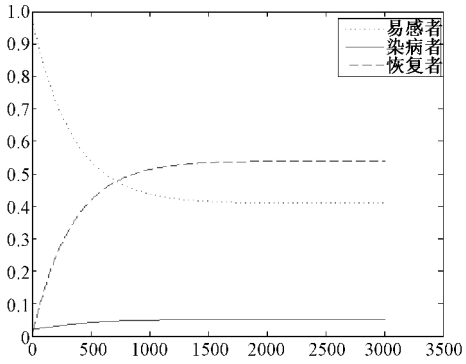


图 5

0.3，r = 0.2，p = 0.01，m = 0.8. 经计算可得 R_0 = 1.1494 > 1，通过定理 3.3.2 可知地方病平衡点局部渐近稳定，此时疾病将发展为地方病(见图 4，图 5) .

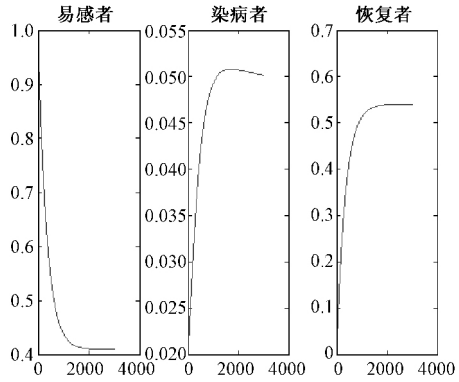


图 4

5　结论分析

(1) 本文主要讨论了关于饱和发病率、垂直传染以及预防接种等因素对传染病的影响. 定理的证明均建立在基本再生数 R_0 的取值基础之上. 即: 当 $R_0 \leqslant 1$ 时，无病平衡点 E_0 存在且在 Ω 内是全局渐近稳定的，此时疾病将被根除; 当 $R_0 > 1$ 时，系统存在唯一的地方病平衡点 E_* 且局部渐近稳定，此时疾病将发展成为地方病.

(2) 此模型中传染率为非线性的，考虑因素全面，与其他模型相比更具有现实意义.

(3) 本文的研究结果为传染病的医学研究提供理论支撑. 基本再生数 R_0 与传染系数、种群自然出生率、染病者的垂直传染率、染病者的死亡率、染病者的恢复率、恢复者的

免疫失去系数，及对易感者及恢复者新生儿预防接种的比例有关. 所以，可以通过采取对种群的适当隔离，提高对易感者及恢复者新生儿预防接种的比例，加大对染病者的救治等措施来控制 R_0，使之小于 1，从而避免传染病发展成为地方病.

参　考　文　献

[1] 付景超，井元伟，张中华，等. 两类具有垂直传染和预防接种 SIRS 传染病模型 [J]. 系统科学与数学，2009，29(4) : 502 - 511.

[2] 王翠娇，宋燕，王旭辉，等. 一类具有垂直传染和预防接种 SEIR 传染病模型 [J]. 大学数学，2010，26(4) : 126 - 129.

[3] 王俊峰，薛亚奎. 一类具有垂直传染和预防接种 SEIR 传染病模型的稳定性 [J]. 生物数学学报，2011，26(1) : 169 - 174.

[4] 原存德，胡宝安. 具有阶段结构的 SI 传染病模型. [J]. 应用数学学报，2002，25(2) : 192 - 203.

[5] Huo H，Feng L. Gloabal stability for an HIV/AIDS epidemic model with different latent stages and treatment. [J]. Applied Mathematics Modelling，2013，37(3) : 1480 - 1489.

[6] Hao P，Fan D，Wei J，et al. Dynamic behaviors of a delayed HIV model with stage-structure. [J]. Commun Nonlinear Sci Number Simulat，2012，17: 4753 - 4766.

[7] Hu Z，Ma W，Ruan S. Analysis of SIR epidemic models with nonlinear incidence rate and treanent. Mathematical [J]. Biosciences，2012，238: 12 - 10.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

[8] Liu X,Yang L. Stability analysis of an SEIQV epidemic model with saturated incidence rate [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2012,13(6):2671 - 2679.

[9] 王高雄,周之铭. 常微分方程 [M]. 高教出版社,2010.

附录

```
clear all;
close all;
clc;

flag = 2

if  flag = = 1
    b = 0. 2; beta = 0. 2; deta = 0. 3; alpha = 0. 5; bT = 0. 5;
    r = 0. 4; p = 0. 01; q = 1 - p; m = 0. 5;
end
if  flag = = 2
    b = 0. 2; beta = 0. 5; deta = 0. 1; alpha = 0. 3; bT = 0. 3;
    r = 0. 2; p = 0. 01; q = 1 - p; m = 0. 8;
end

I = 0. 02; S = 0. 98; R = 1 - I-S;


dt = 0. 01;
itemp = I; stemp = S; rtemp = R;
for i = 0: dt: 30
    temps = stemp + ( - beta* stemp* itemp/( 1 + alpha* itemp) + . . .
( 1 - m) * b* ( stemp + rtemp) + p* bT* itemp-b* stemp + deta* rtemp) * dt;
    tempi = itemp + ( beta* stemp* itemp/( 1 + alpha* itemp) + . . .
        q* bT* itemp-bT* itemp-r* itemp) * dt;
    tempr = rtemp + ( r* itemp + m* b* ( stemp + rtemp) - . . .
        ( b + deta) * rtemp) * dt;
    if temps < 0 | tempi < 0 | tempr < 0
        break;
    end
    stemp = temps; S = [S stemp];
    itemp = tempi; I = [I itemp];
    rtemp = tempr; R = [R rtemp];
end

figure,
subplot( 1,3,1) ,plot( S) ,title( '易感者') ;
subplot( 1,3,2) ,plot( I) ,title( '染病者') ;
subplot( 1,3,3) ,plot( R) ,title( '恢复者') ;

figure,
plot( S, 'b') ;
hold on;
```


(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

```
plot( I, 'g' ) ;
hold on;
plot( R, 'r' ) ;
hold off;
title( '蓝线 - 易感者,绿线 - 染病者,红线 - 恢复者' ) ;
num = 10;
x = 1: num: length( S) ;
S = S( 1: num: end) ;
I = I( 1: num: end) ;
R = R( 1: num: end) ;
figure,
plot( x,S, 'r: ' ,x,I, 'r - ' ,x,R, 'r—' ) ;

legend( '易感者' , '染病者' , '恢复者' )
```

Stability Analysis of a SIRS Epidemic Model

Wang Qian　Wang Tingting

(School of Science, Beijing University of Posts of Telecommunications, Beijing　100876;
Shandong Lunan Machine Tool Co. ,LTD, Tengzhou, Shandong　277500)

Abstract

In this paper, the SIRS epidemic model with transmission, vaccination and saturated incidence rate is studied, and its basic reproductive number R_0, the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium point are given. Stability of the disease free equilibrium and the endemic equilibrium point are proved by using the method of Liapunov function, the LaSalle invariance principle and Hurwitz lemma, which are completely determined by the basic reproduction numberR_0. If $R_0 \leqslant 1$, the disease-free equilibrium is global asymptotically stable and the disease always dies out. If $R_0 \geqslant 1$, endemic equilibrium is locally stable and the disease is persistent. At last, we make use of the numerical simulation to verify the reliability of the conclusion.

Key words: epidemic model, saturated incidence rate, continuous vaccination, equilibrium, stability.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net