DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.02.003

关于对称区间上定积分的计算*

薛利敏 关文吉**
(渭南师范学院 数学与信息科学学院,陕西 渭南 714099)

摘 要

根据被积函数的特性,研究了关于原点对称区间上定积分的计算问题,得到了关于原点对称区间上定积分计算的一个公式. 探讨并研究了几类函数,得到了这些函数的有关性质. 在此基础上,将原定积分的计算问题进行转化,给出了这些函数关于原点对称区间上定积分的计算方法,这种方法不需要直接求原函数,简化了原点对称区间上定积分的计算问题.

关键词: 对称区间,偶函数,定积分.
中图分类号: O172.2

定积分是积分学的一个基本概念,许多理论和实际问题都归结为计算定积分的问题,牛顿—莱布尼茨公式是计算定积分的一种重要方法,然而,我们经常会遇到或者不容易求出被积函数的原函数,或者被积函数的原函数不能用初等函数形式表示出来,这时,就不能方便地应用牛顿—莱布尼茨公式计算定积分. 我们知道,定积分与不定积分不同,求不定积分就一定要求出原函数,而定积分是和式的极限,是一个数值,虽然牛顿—莱布尼茨公式给出了求定积分的一种方法,但不是唯一的方法,定积分有其自身的特殊性,有时我们并不需要求出被积函数的原函数,而是根据被积函数的奇偶性以及积分区间的对称性来计算定积分[1].

这里,我们研究关于原点对称区间上的定积分的计算问题,将原不容易求解的定积分问题转化为容易求解的定积分问题,简化了一类被积函数在原点对称区间上的定积分的计算.

1 对称区间上定积分的性质

定理 设函数 $f(x)$,$g(x)$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上连续,且 $g(x)$ 是偶函数,则定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]g(x)\,dx$.

证明 因为 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\,dx$,

令 $x=-t$,则

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\,d(-t) = \int_{0}^{a} f(-t)g(t)\,dt,$$

所以 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]g(x)\,dx$.

特别,如果定理中函数 $g(x)=1$,则有下面的推论.

推论 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-a,a]$ 上连续,则定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx$.

2 有关函数的性质

性质 1 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x^{2n-1}}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=1$.

证明 $f(x)+f(-x) = \dfrac{1}{1+e^{x^{2n-1}}} + \dfrac{1}{1+e^{-x^{2n-1}}} = \dfrac{1+e^{-x^{2n-1}}+1+e^{x^{2n-1}}}{(1+e^{x^{2n-1}})(1+e^{-x^{2n-1}})} = 1.$

收稿日期: 2015-06-24
* 陕西省(数学)扶持学科建设资助项目;渭南师范学院教育教学改革重点研究项目:微课在高等数学教学中的研究与实践(JG201512)
** 通讯作者

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

性质 2　设函数 $f(x)=\frac{1}{1+e^{-x^{2n-1}}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=1$.

证明　$f(x)+f(-x)=\frac{1}{1+e^{-x^{2n-1}}}+\frac{1}{1+e^{x^{2n-1}}}$

$=\frac{1+e^{x^{2n-1}}+1+e^{-x^{2n-1}}}{(1+e^{-x^{2n-1}})(1+e^{x^{2n-1}})}=1.$

性质 3　设函数 $f(x)=\frac{e^{x^{2n-1}}}{1+e^{x^{2n-1}}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=1$.

证明　$f(x)+f(-x)=\frac{e^{x^{2n-1}}}{1+e^{x^{2n-1}}}+\frac{e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-x^{2n-1}}}$

$=\frac{e^{x^{2n-1}}(1+e^{-x^{2n-1}})+e^{-x^{2n-1}}(1+e^{x^{2n-1}})}{(1+e^{x^{2n-1}})(1+e^{-x^{2n-1}})}=1.$

性质 4　设函数 $f(x)=\frac{e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-x^{2n-1}}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=1$.

证明　$f(x)+f(-x)=\frac{e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-x^{2n-1}}}+\frac{e^{x^{2n-1}}}{1+e^{x^{2n-1}}}$

$=\frac{e^{-x^{2n-1}}(1+e^{x^{2n-1}})+e^{x^{2n-1}}(1+e^{-x^{2n-1}})}{(1+e^{-x^{2n-1}})(1+e^{x^{2n-1}})}=1.$

性质 5　设函数 $f(x)=\arctan e^{x^{2n-1}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

证明　因为 $[f(x)+f(-x)]'=(\arctan e^{x^{2n-1}}+\arctan e^{-x^{2n-1}})'=\frac{(2n-1)x^{2n}e^{x^{2n-1}}}{1+e^{2x^{2n-1}}}+\frac{-(2n-1)x^{2n}e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-2x^{2n-1}}}=0$,

所以　$f(x)+f(-x)=C$,令 $x=0$,得 $2\arctan 1=C$,于是　$C=\frac{\pi}{2}$,

故　$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

性质 6　设函数 $f(x)=\arctan e^{-x^{2n-1}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

证明　因为 $[f(x)+f(-x)]'=(\arctan e^{-x^{2n-1}}+\arctan e^{x^{2n-1}})'=\frac{-(2n-1)x^{2n}e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-2x^{2n-1}}}+\frac{(2n-1)x^{2n}e^{x^{2n-1}}}{1+e^{2x^{2n-1}}}=0$,

所以　$f(x)+f(-x)=C$,令 $x=0$,得 $2\arctan 1=C$,于是　$C=\frac{\pi}{2}$,

故　$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

性质 7　设函数 $f(x)=\operatorname{arccot} e^{x^{2n-1}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

证明　因为 $[f(x)+f(-x)]'=(\operatorname{arccot} e^{x^{2n-1}}+\operatorname{arccot} e^{-x^{2n-1}})'=-\frac{(2n-1)x^{2n}e^{x^{2n-1}}}{1+e^{2x^{2n-1}}}-\frac{-(2n-1)x^{2n}e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-2x^{2n-1}}}=0$,

所以　$f(x)+f(-x)=C$,令 $x=0$,得 $2\operatorname{arccot}1=C$,于是　$C=\frac{\pi}{2}$,

故　$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

性质 8　设函数 $f(x)=\operatorname{arccot} e^{-x^{2n-1}}$($n$ 为正整数),则 $f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

证明　因为 $[f(x)+f(-x)]'=(\operatorname{arccot} e^{-x^{2n-1}}+\operatorname{arccot} e^{x^{2n-1}})'=\frac{(2n-1)x^{2n}e^{-x^{2n-1}}}{1+e^{-2x^{2n-1}}}-\frac{(2n-1)x^{2n}e^{x^{2n-1}}}{1+e^{2x^{2n-1}}}=0$,

所以　$f(x)+f(-x)=C$,令 $x=0$,得 $2\operatorname{arccot}1=C$,于是　$C=\frac{\pi}{2}$,

故　$f(x)+f(-x)=\frac{\pi}{2}$.

性质 9　设函数 $f(x)=g(x)\ln(1+e^x)$,且 $g(x)$ 是奇函数,

则　$f(x)+f(-x)=xg(x)$.

证明　$f(x)+f(-x)=g(x)\ln(1+e^x)-g(x)\ln(1+e^{-x})=g(x)\ln\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}=g(x)\ln\frac{(1+e^x)e^x}{(1+e^{-x})e^x}=xg(x)$.

性质 10　设函数 $f(x)=g(x)\ln(1+e^{-x})$,且 $g(x)$ 是奇函数,

则　$f(x)+f(-x)=-xg(x)$.

证明　$f(x)+f(-x)=g(x)\ln(1+e^{-x})-g(x)\ln(1+e^x)=g(x)\ln\frac{1+e^{-x}}{1+e^x}=g(x)\ln\frac{(1+e^{-x})e^{-x}}{(1+e^x)e^{-x}}=-xg(x)$.

3　应用举例

例 1[2]　计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

解 由定理和 $n = 1$ 时的性质 2 得

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x}}\right)\cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{1}{8}(\pi + 2).$$

例 2[3] (陕西省第八次大学生高等数学竞赛第 15 题) 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^2 x \cos^2 x}{1+e^x}dx$.

解 由定理和 $n = 1$ 时的性质 3 得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin^2 x \cos^2 x}{1+e^x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\cdot \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin^4 x)\, dx = \frac{\pi}{16}.$$

例 3[4] 计算定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{(\ln x)^2}{1+x}dx$.

解 令 $\ln x = t$,则 $\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{(\ln x)^2}{1+x}dx = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{1+e^t}e^t dt$,

由定理和 $n = 1$ 时的性质 3 得

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{(\ln x)^2}{1+x}dx = \int_{-1}^{1} \frac{t^2}{1+e^t}e^t dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^t}{1+e^t} + \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\right)t^2 dt$$

$$= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}.$$

例 4[5] 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.

解 由定理和 $n = 1$ 时的性质 5 得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\arctan e^x + \arctan e^{-x}) \sin x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}.$$

例 5 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1+e^x)\, dx$.

解 由推论和性质 9 得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(1+e^x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\cos x = -\left(x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right) = 1.$$

4 结 语

根据上面的讨论,我们可以看出,计算关于原点对称区间上的定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\, g(x)\, dx$,关键是: 如果 $f(x) + f(-x) =$ 常数,且定积分 $\int_0^a g(x)\, dx$ 容易计算; 或者虽然 $f(x) + f(-x) \neq$ 常数,但是定积分 $\int_0^a [f(x) + f(-x)]\, g(x)\, dx$ 容易计算,我们就可以将不容易计算的定积分 $\int_{-a}^{a} f(x)\, g(x)\, dx$ 问题转化为容易计算的定积分 $\int_0^a [f(x) + f(-x)]\, g(x)\, dx$ 问题,下面再举一例加以说明.

例 6 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2-x^6}{1+x\sqrt{1+x^4}}dx$.

解 由定理得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-x^2-x^6}{1+x\sqrt{1+x^4}}dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{1-x\sqrt{1+x^4}}\right)\cdot (1-x^2-x^6)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1-x^2(1+x^4)}\right)(1-x^2-x^6)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2dx = 1.$$

以上我们讨论了几种函数关于原点对称区间上定积分的计算问题,肯定还有许多函数能用这种方法来简化定积分的计算,有待我们进一步探讨.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] 薛利敏. 定积分计算中的广义奇偶性 [J]. 渭南师范学院学报,2013(9):9 - 13.
[2] 同济大学应用数学系. 高等数学习题集 [M]. 北京: 高等教育出版社,2001,7,102.
[3] 马德炎. 巧用换元法求定积分 [J]. 高等数学研究,2012(6): 50 - 52.
[4] 王爱苹,孙贵玲. 浅谈定积分的计算技巧 [J]. 数学学习与研究,2010(17):87.
[5] 陈文灯,黄先开. 考研数学复习指南 [M]. 北京: 世界图书出版公司,2010,2,106.

On the Calculation of the Definite Integral in the Symmetrical Interval

Xue Limin　Guan Wenji

(Department of Mathematics and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan, Shaanxi　714099)

Abstract

According to the characteristics of the integrand, study on the calculation of the definite integral in the symmetrical interval about the origin of problems, and get the definite integral in the symmetrical interval about the origin of calculation of a formula. Explore and study on several kinds of function, some properties of these functions are obtained. Based on this, turn original scheduled integral calculation problem, the calculation method of definite integral in the symmetrical interval about the origin of these functions is given, this method does not need direct function, simplifying the calculation problem of the definite integral on origin of symmetric interval.

Key words: symmetric interval, even functions, definite integral.

作者简介　薛利敏(1960 -),男,陕西韩城人,渭南师范学院数学与信息科学学院教授,主要从事基础数学与运筹学研究.
通讯作者　关文吉(1978 -),女,陕西大荔人,渭南师范学院数学与信息科学学院副教授,硕士,研究方向为数论研究.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net