DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.02.006



# 金属椭圆形亚波长孔阵列透射偏振响应特性*

赵 倩 刘江涛

(1. 北京市第十中学,北京 100072; 2. 南昌大学物理系,江西 南昌 330031)

**摘 要**

本文以数值模拟结果为基础,建立了椭圆孔阵反常透射的偏振依赖关系表达式,清晰地揭示了其中的物理图像. 工作分为单孔、双孔和阵列三个层次. 先给出了单孔内 SPP 波与偏振角的关系以及透射与偏振角的关系,进而建立了孔间耦合式. 在此基础上考虑最近邻及次近邻耦合作用,给出了整个列阵的透射率与偏振依赖关系. 以上关系式与数值模拟结果符合很好.

**关键词:** 亚波长,偏振,阵列,反常透射,表面等离子体波.
**中图分类号:** O41; O43

## 1 引 言

金属亚波长孔阵的反常透射(EOT)主要由两方面决定,一是孔阵本身的结构,二是入射光偏振与结构的关系. 长方形(包括方形)和椭圆形(包括圆形)是两类最简单的孔型. 对于长方形孔阵中透射与偏振的关系,通过数值模拟方法可以归纳出一些简单的解析表达式,这些关系式不但与实验结果符合的很好,同时还清楚地揭示了其中的物理机制[1]. 与之同样重要的椭圆孔阵也引起人们的关注并获得许多重要的实验结果. 表 1 列出了各种结构与偏振的关系,其中"有(无)关"表示这种结构的透射与偏振有(无)关. 在表 1 中列出的结构中,长方格子的椭圆孔阵无疑是最具普遍性的,当然也是最重要的. 但可惜这种结构的研究未见报道. 数值模拟方法在长方孔阵中取得成功使我们相信它也是研究这个问题的有力工具,本文主要目的就是用模拟方法得到表 1 中确实的重要结果,并进一步归纳出解析表达式来解释其中的物理机制. 这些来自长方格子椭圆孔阵的解析公式可以描述表 1 中所有结构的相关规律.

本文先从单孔入手,在获得单孔透射规律的基础上研究两单孔之间的耦合规律. 再将这种孔间耦合推广到整个孔阵.

表 1 光源偏振对不同结构的亚波长金属孔阵列透过的影响与否的实验结论统计

| | 1. 方格阵列 | 2. 长方格阵列 | 3. 单孔 |
|---|---|---|---|
| 圆孔 | 无关 | 有关 | 无关 |
| 椭圆孔 | 有关 | 无报道 | 有关 |

## 2 模型与计算结果

### 2.1 计算模型

在厚度为 $h=3\mu m$ 的金属银的薄膜上刻有椭圆孔(包含圆孔),其中的数字是人为编号,用于后面讨论. 建立如图 1 所示的坐标系.

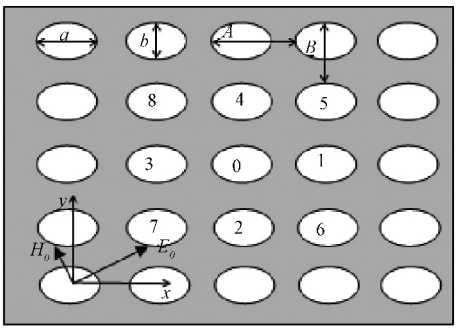



图 1 计算模型: 孔阵列结构示意图

孔的尺寸大小在金属膜平面两个坐标方向上分别标记为 $a$,$b$,阵列周期常数分别标记为 $A$,$B$. 用一束偏振光沿 $z$ 方向照射,电、磁场强度在 $xy$ 平面上分

收稿日期: 2015-05-29
* 国家自然科学基金(NO. 11274233)



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

别记为 $E_0$,$H_0$.

$$\left.\begin{aligned} E_{0x} &= E_0\sin\theta \\ E_{0y} &= E_0\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (1a)$$

$$\left.\begin{aligned} H_{0x} &= -H_0\cos\theta \\ H_{0y} &= H_0\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (1b)$$

其中偏振角 $\theta$ 是偏振电场与 $y$ 轴夹角. 在计算中入射光波长取 $\lambda_0 = 0.6$ μm. 金属银的介电常数与波长的关系可以表示为 $\varepsilon = 3.57 - 54.33\lambda_0^2 + i(-0.083\lambda_0 + 0.921\lambda_0^3)$ [2,3],所以对于 $\lambda_0 = 0.6$ μm,有 $\varepsilon = -15.9889 + i0.1491$.

光照射到金属孔阵列后,会以表面等离子体的形式穿过孔阵. 在模拟计算中在任意一个小孔的出口端放置一个理想探测器去测量通过小孔的能流 $P$,当金属孔阵列移开时,探测器位置不变还可以继续测得能量 $P_0$,由此定义金属孔的能量透过率为: $T = P/P_0$. 由于模拟得到的透过率 $T$ 实际上表征的是坡印亭量 $S$,$T$ 和 $S$ 有一定的线性关系,所以在理论解释的时候我们以坡印亭量 $S$ 去推理验证模拟结果.

## 2.2　单孔的透射

单孔是孔阵的基础,先研究单孔透射与偏振的关系才能研究孔阵的透射. 椭圆孔由于长短轴的不同,在这两个方向上激发产生的 SPP 的能力不同,其透过率或许会随入射光偏振有响应. 因此先观察 $xy$ 两个方向上 SPP 的偏振激发率(PERs-polarization exciting ratio). 将电磁波在亚波长小孔内两方向上的表面等离子波激发率 $\eta_{Ex}$,$\eta_{Ey}$, $\eta_{Hx}$ 和 $\eta_{Hy}$ 表示为:

$$\eta_{Ei} = E_i^{\text{hole}}/E_{0i},\eta_{Hi} = H_i^{\text{hole}}/H_{0i},i = x,y \quad (2)$$

将单孔的一边固定为 $a = 0.3$ μm,另一边长 $b$ 从 0.2 μm 变化到 0.3 μm,得到表面等离子波激发率 $\eta_{Ex}$, $\eta_{Ey}$, $\eta_{Hx}$ 和 $\eta_{Hy}$ 的变化情况,如图 2 中点所示.

在图 2 的最右端,当 $a = 0.3$ μm 时,是圆孔,有: $\eta_{Ex} = \eta_{Ey}$,$\eta_{Hx} = \eta_{Hy}$,这反映了圆孔的旋转对称性.

当 $b$ 逐渐变小,在 $b \leqslant 0.25$ μm 的范围内,孔变成较扁的椭圆孔,在此将其定义为缝型孔,比如当 $b = 0.2$ μm 时,SPP 激发率差别已经很大: $\eta_{Ex} = 0.042$,$\eta_{Ey} = 4.5$,$\eta_{Hx} = 3.00$,$\eta_{Hy} = 0.035$,在不同方向上的 SPP 的 PERs 不再相等,和圆孔有明显区别.

现在考虑透射与偏振的关系. 偏振光入射将会激发怎样的 SPP 是问题的关键,一个合理的假设是

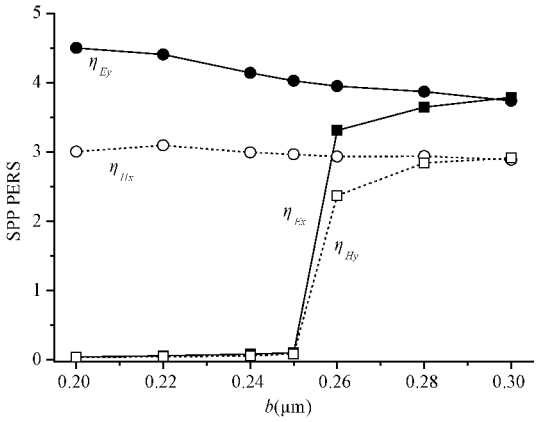



图 2　圆孔或椭圆孔中 $a = 0.3$ μm 时 PERs 随边长 $b$ 的变化

$$\left.\begin{aligned} E_x^{\text{hole}} &= E_{0,x}^{\text{hole}}\sin\theta \\ E_y^{\text{hole}} &= E_{0,y}^{\text{hole}}\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (3a)$$

$$\left.\begin{aligned} H_x^{\text{hole}} &= -H_{0,x}^{\text{hole}}\cos\theta \\ H_y^{\text{hole}} &= H_{0,y}^{\text{hole}}\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (3b)$$

其中(3)式中的振幅可用(2)式或图 2 表示的 SPP 激发率求得.

$$\left.\begin{aligned} E_x^{\text{hole}} &= \eta_{Ex}E_{0x} \\ E_y^{\text{hole}} &= \eta_{Ey}E_{0y} \\ H_x^{\text{hole}} &= \eta_{Hx}H_{0x} \\ H_y^{\text{hole}} &= \eta_{Hy}H_{0y} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

其孔内部坡印廷矢量可以表示为:

$$\begin{aligned} S^{\text{hole}} &= (E_x^{\text{hole}}H_y^{\text{hole}} - E_y^{\text{hole}}H_x^{\text{hole}})/2 \\ &= (\eta_{Ex}\eta_{Hy}E_{0x}H_{0y} - \eta_{Ey}\eta_{Hx}E_{0y}H_{0x})/2 \end{aligned} \quad (5)$$

可见坡印廷矢量是一个随偏振角 $\theta$ 呈 $\cos^2\theta$ 形式变化的函数,孔内透过能量最终会在出口转化成辐射波及出射面上的 SPP,因此透射率应和孔内坡印廷成正比. 图 3 是对 $a \times b = 0.3 \times 0.2$(μm$^2$)椭圆孔模拟计算的透射率与偏振的依赖关系,可以验证这确实是一个很严格的 $\cos^2\theta$ 形式的函数关系. 因此(3)以及其导出式(5)都是正确的. 它们揭示了孔内电磁场性质以及透射与偏振的依赖关系.

## 2.3　双孔的计算

双孔之间的耦合是孔间耦合的基础,整个孔阵的空间耦合可以分解成每一对最近邻孔之间的耦合效应的总和,这是一级近似. 如果进一步精确,可以计算每一对次紧邻耦合,以此类推.

圆孔方格阵列(C-S)中双孔结构最近邻影响,取图 1 中只保留两个孔,在 $x$ 方向上取 0 孔和它的最近邻 1 孔,简称 0 - 1 结构,偏振角 $\theta = 90°$保持不



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

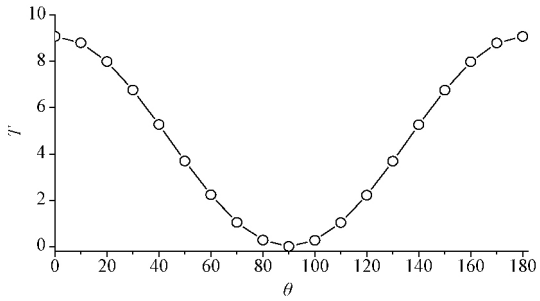



图3 单个 $a \times b = 0.3 \times 0.2(\mu m^2)$ 大小的缝型椭圆孔的透过率与入射偏振角的关系

变，其中 $A = 0.94\ \mu m$，将 0 孔的透过率记为 $T_{01}$，模拟圆孔 0 – 1 结构的 0 孔透过率的结果为图 4(a) 中圆点所示. 可见在 0 – 1 结构中 0 孔透过率分为两部分: 一部分是 0 孔自身的透过率; 一部分是 1 孔对 0 孔透过率的影响. 当 $\theta = 0^0$ 时，孔间相互作用不存在，仅有 0 孔自身透过率，且圆孔透过率对偏振无响应. 孔间相互作用部分为在金属膜表面沿 x 方向上传播的 SPP 起到了主要作用，当关闭孔 1，只保留孔 0，即单孔结构时，在原来孔 0 和孔 1 中间放置 1 理想探测器得此处 $E_y^{SPP}$ 和 $H_z^{SPP}$ 值很小，相对于 $E_z^{SPP}$ 和 $H_y^{SPP}$ 可以忽略不计，而 $E_z^{SPP}$ 和 $H_y^{SPP}$ 随入射偏振角的响应如图 4(b) 点所示，拟合可得公式:

$$\left.\begin{aligned} E_z^{SPP} &= E_{0z}^{SPP}\sin\theta \\ H_y^{SPP} &= H_{0y}^{SPP}\sin\theta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

定义电磁场转化率 $\gamma_{01}$:

$$\gamma_{01} = H_y^{SPP}/H_y^{hole} = H_{0y}^{SPP}/H_{0y}^{hole} \tag{7}$$

这里 $\gamma_{01}$ 表示的是表面等离子体波由孔 0 传至孔 1 的磁场转化率，是一个常数.

所以当孔 1 存在时，孔 0 口处 z 方向上磁场除孔 0 自身 $H_y^{hole}$，还有孔 1 激发后传播至孔 0 的 $H_y^{SPP}$. 因此此时 $y$ 方向上总磁场表示为 $H_y^{SPP} + H_y^{hole}$，则 z 方向上坡印廷矢量为:

$$S_{01,z}^{hole} = E_x^{hole}\left(H_y^{hole} + H_y^{SPP}\right) - E_y^{hole}H_x^{hole} = S_z^{hole} + E_x^{hole}H_y^{SPP} \tag{8}$$

联合公式(3)、(6) 和(7) 到(8) 可以得到:

$$S_{01,z}^{hole} = S_z^{hole} + \Delta S_{01,z}^{hole} \tag{9a}$$

其中

$$\Delta S_{01,z}^{hole} = 2S_{01,z}^{hole}\gamma_{01}\sin^2\theta \tag{9b}$$

所以在 0 – 1 双孔结构中，最终透过坡印廷矢量 $S_{01,z}^{hole}$ 由两部分组成: 一部分是单孔结构时的透过能; 另一部分是双孔结构时孔间相互影响产生的作用能，然而相互作用项的大小又由最终总能量 $S_{01,z}^{hole}$ 决定. 此时得在 0 – 1 结构中，0 孔最终的透过率写成:

$$T_{01}(\theta) = T_0 + T_{01}(\theta)\,C_{01}(\theta)\,\sin^2\theta \tag{10}$$

根据模拟结果的数据可以得到: $C_{01} = 0.150$，将(2.10) 式做成曲线如图 4(a) 中所示，这与仿真模拟结果完全符合.

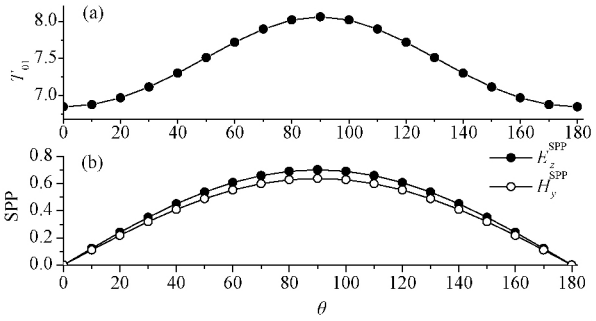



图4 圆孔 0 – 1 结构中 $T_{01}$ 的计算与模拟结果

同理在双孔 0 – 5 结构中可得 0 孔透过率表达式为: $T_{05} = T_0 + T_{05}C_{05}(\theta)\,\sin^2(\theta + 45°)$，根据模拟结果的数据得: $C_{05} = 0.151$，做出曲线如图 5 中所示，与仿真模拟结果，图 5 中原点也完全符合.

至此我们已经可以用解析式表达两孔间耦合，这为处理孔阵整体孔间耦合提供了基础.

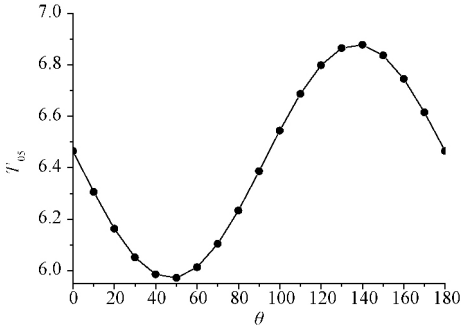



图5 圆孔 0 – 5 结构中 $T_{05}$ 的计算与模拟结果

## 2.4 阵列的计算

孔阵结构透射率可以表达为[1]:

$$T_{array} = T_0 + \sum_{i=1}^{8}\Delta T_{0i} \tag{11}$$

其中式中 $i$ 的取值范围 1 – 8 表示小孔 0 周围八个孔间相互作用.

在圆孔方格阵列(C-S) 中，$A \times B = 0.94 \times 0.94\ (\mu m^2)$，0 孔与周围 8 个小孔的相互作用项分别为:

$$\Delta T_{01} = T_{C-S}C_{01}\sin^2\theta \tag{12a}$$

$$\Delta T_{02} = T_{C-S}C_{02}\sin^2(\theta - 90°) = T_{C-S}C_{02}\cos^2\theta \tag{12b}$$

$$\Delta T_{03} = T_{C-S}C_{03}\sin^2(\theta - 180°) = T_{C-S}C_{03}\sin^2\theta \tag{12c}$$



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\Delta T_{04} = T_{C-S}C_{04}\sin^2(\theta-270°) = T_{C-S}C_{04}\cos^2\theta \quad (12d)$$

$$\Delta T_{05} = T_{C-S}C_{05}\sin^2(\theta+45°) \quad (12e)$$

$$\Delta T_{06} = T_{C-S}C_{06}\sin^2(\theta-45°) \quad (12f)$$

$$\Delta T_{07} = T_{C-S}C_{07}\sin^2(\theta-135°) \quad (12g)$$

$$\Delta T_{08} = T_{C-S}C_{08}\sin^2(\theta-225°) \quad (12h)$$

在方格阵列中,最近邻四孔与 0 孔的距离相等,同理次近邻四孔与 0 孔的距离也相等,所以可知以上式子中的相互作用系数之间的关系有:

$$C_{01} = C_{02} = C_{03} = C_{04} \quad (13a)$$

$$C_{05} = C_{06} = C_{07} = C_{08} \quad (13b)$$

把以上关系式(12)(13)都代入到(11)中可以得到阵列中 0 孔的透过率表示为:

$$T_{C-S} = T_0 + T_{C-S}(2C_{01} + 2C_{05}) \quad (14)$$

代入 $C_{01}$ 和 $C_{05}$ 的值得最后结果为

$$T_{C-S} = 6.85 \quad (15)$$

可见此阵列透射率并不与偏振角度有响应.

在圆孔长方格阵列(C-R)中,$A\times B = 0.94\times 0.8$ ($\mu m^2$),定义角度 $\alpha$,$\alpha = \arctan(B/A)$,同理近邻小孔对其的影响项和方格阵列中表示一样,即:

$$\Delta T_{01} = T_{C-R}C_{01}\sin^2\theta \quad (16a)$$

$$\Delta T_{02} = T_{C-R}C_{02}\sin^2(\theta-90°) = T_{C-R}C_{02}\cos^2\theta \quad (16b)$$

$$\Delta T_{03} = T_{C-R}C_{03}\sin^2(\theta-180°) = T_{C-R}C_{03}\sin^2\theta \quad (16c)$$

$$\Delta T_{04} = T_{C-R}C_{04}\sin^2(\theta-270°) = T_{C-R}C_{04}\cos^2\theta \quad (16d)$$

$$\Delta T_{05} = T_{C-R}C_{05}\sin^2(\theta+\alpha) \quad (16e)$$

$$\Delta T_{06} = T_{C-R}C_{06}\sin^2(\theta-\alpha) \quad (16f)$$

$$\Delta T_{07} = T_{C-R}C_{07}\sin^2(\theta+\alpha) \quad (16g)$$

$$\Delta T_{08} = T_{C-R}C_{08}\sin^2(\theta-\alpha) \quad (16h)$$

然而与在方格阵列中不同的是在长方格阵列中由于 $B \neq A$,所以相互作用项里相互作用系数的关系是:

$$C_{01} = C_{03} \neq C_{02} = C_{04} \quad (17)$$

次近邻小孔与 0 孔之间的距离是相等的,所以 $C_{05} = C_{06} = C_{07} = C_{08}$ 继续成立. 结合模拟得出的 $C_{02} = 0.02$ 和 $C_{05} = 0.02$,得透过率表达式:

$$T_{C-R} = 6.86/\{1-2(0.15\sin^2\theta + 0.02\cos^2\theta) - 2\times 0.02\,[\sin^2(\theta-40.4°) + \sin^2(\theta+40.4°)]\} \quad (18)$$

对于椭圆孔阵列,在此只研究 $b \leqslant 0.25$ μm 时的缝型椭圆孔的阵列,由 2.2 节中单孔的研究可知:此类型的孔间作用在 0 - 1、0 - 3 结构中由于 $\eta_{Hy}$ 非常小,所以 0 - 1、0 - 3 之间的相互影响几乎没有. 其余孔间的相互作用项在方格阵列(E-S)中分别为:

$$\Delta T_{02} = T_{E-S}C_{02}\sin^2(\theta-90°) = T_{E-S}C_{02}\cos^2\theta \quad (19a)$$

$$\Delta T_{04} = T_{E-S}C_{04}\sin^2(\theta-270°) = T_{E-S}C_{04}\cos^2\theta \quad (19b)$$

$$\Delta T_{05} = T_{E-S}C_{05}\cos^2\theta\sin^2 45° \quad (19c)$$

$$\Delta T_{06} = T_{E-S}C_{06}\cos^2\theta\sin^2 45° \quad (19d)$$

$$\Delta T_{07} = T_{E-S}C_{07}\cos^2\theta\sin^2 45° \quad (19e)$$

$$\Delta T_{08} = T_{E-S}C_{08}\cos^2\theta\sin^2 45° \quad (19f)$$

在方格阵列中,最近邻四孔与 0 孔的距离相等,同理次近邻四孔与 0 孔的距离也相等,所以可知以上式子中的相互作用系数之间的关系有: $C_{02} = C_{04}$,$C_{05} = C_{06} = C_{07} = C_{08}$,所以有:

$$T_{E-S} = T_0 + 2T_{E-S}\,[C_{02}\cos^2\theta + 2C_{05}\sin^2 45°\cos^2\theta] \quad (20)$$

模拟结果得 $C_{02}(\theta) = 0.09/\cos^2\theta$,$C_{05}(\theta) = 0.002/\cos^2\theta$ 则在椭圆孔方格阵列中有:

$$T_{E-S} = 11.1\cos^2\theta \quad (21)$$

长方格阵列(E-R)中:

$$\Delta T_{02} = T_{E-R}C_{02}\sin^2(\theta-90°) = T_{E-R}C_{02}\cos^2\theta \quad (22a)$$

$$\Delta T_{04} = T_{E-R}C_{04}\sin^2(\theta-270°) = T_{E-R}C_{04}\cos^2\theta \quad (22b)$$

$$\Delta T_{05} = T_{E-R}C_{05}\cos^2\theta\sin^2\alpha \quad (22c)$$

$$\Delta T_{06} = T_{E-R}C_{06}\cos^2\theta\sin^2\alpha \quad (22d)$$

$$\Delta T_{07} = T_{E-R}C_{07}\cos^2\theta\sin^2\alpha \quad (22e)$$

$$\Delta T_{08} = T_{E-R}C_{08}\cos^2\theta\sin^2\alpha \quad (22f)$$

代入式(11)中得:

$$T_{E-R} = T_0(\theta) + 2T_{E-R}\,[C_{02}(\theta)\cos^2\theta + 2C_{05}(\theta)\sin^2(40.4°)\cos^2\theta] \quad (23)$$

其中模拟得 $C_{02}(\theta) = 0.16/\cos^2\theta$; $C_{05}(\theta) = 0.002/\cos^2\theta = C_{06}(\theta) = C_{07}(\theta) = C_{08}(\theta)$. 所以椭圆孔长方格阵列中:

$$T_{E-R} = 13.4\cos^2\theta \quad (24)$$

由以上判断除圆孔方格阵列透射对入射偏振角度无响应以外,其余三种阵列的透射都是随入射偏振角度有响应的,响应规律如图 6(a)、(b)、(c)所示,其中 $T_{E-S}$ 的表达式规律能和已有实验结果[4]相互符合; $T_{C-S}$ 和 $T_{C-R}$ 的结果也与表一中实验结果符合; 至于 $T_{E-R}$ 虽然目前暂无实验结果佐证,在此可



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

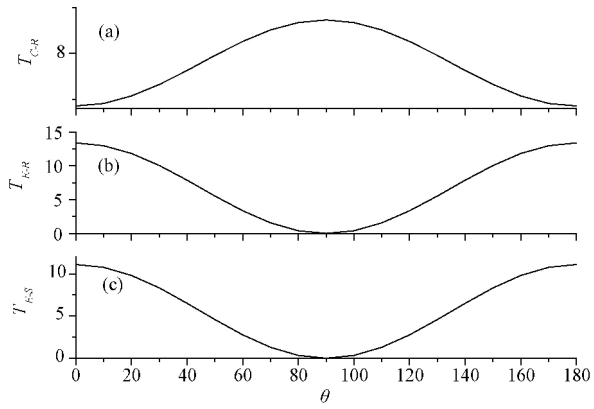



图 6 (a) 圆孔长方格阵列 $T_{C-R}$ 的表达式结果;(b) 椭圆孔长方格阵列 $T_{E-R}$ 的表达式结果;(c) 椭圆孔方格阵列 $T_{E-S}$ 的表达式结果

做一理论预期.

## 3 结 论

本文给出了单孔中电磁场,透射率,孔间耦合以及整体椭圆孔阵透射率与入射偏振角的关系,这些关系式来自对物理机制的猜测与分析并被数值模拟计算证实. 这些关系表达式不仅正确描述了椭圆孔阵反常透射的偏振依赖的物理图像,还可在实际器件设计中将数值模拟或者实验中获得的简单参数代入其中,得到对复杂情况的有用预测与结果.

## 参 考 文 献

[1] Zhao Q, Li C, Zhou Y S, et al. The mechanism of the polarization dependence of the optical transmission in subwavelength metal hole arrays [J]. J Phys Condens Matter, 2011, 23: 015005.

[2] Zhou Y S, Gu B Y, Lan S, et al. Time-domain analysis of mechanism of plasmon-assisted extraordinary optical transmission [J]. Phys Rev B, 2008, 78: 081404(R).

[3] 高本庆. 时域有限差分法 FDTD Method [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.

[4] Genet C, Altewischer E, van Exter M P, et al. Optical depolarization induced by arrays of subwavelength metal holes [J]. Phys Rev B, 2005, 71: 033409.

# The Characteristics of the Optical Transmission in Subwavelength Metal Elliptic Hole-array with the Polarization Angle of the Incident Light

Zhao Qian[1] Liu Jiangtao[2]

(1. Beijing No. 10 Middle School, Beijing 100072;
2. Department of Physics, Nanchang University, Nanchang, Jiangxi 330031)

**Abstract**

The formulas describing the relationships of the optical transmission in the elliptic hole-arrays with the polarization angle of the incident light are established based on the numerical simulation results. This work involves three levels: the dependences of the electromagnetic fields in single hole and the corresponding transmission with the polarization angle are given; consequently, the expressions of the coupling effect between a pair of the holes are obtained; finally, the transmissivities of the hole-arrays as the functions of the polarization angle are deduced in consideration of the nearest-neighbor and next nearest-neighbor coupling effects. All of the obtained relationships are proved by simulation results.

**Key words:** subwavelength, polarization, arrays, extraordinary transmission, SPPs.



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net