DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.01.001

对丢番图《算术》中形如 $z^2+kx^2=(k+1)y^2$ 不定方程的研究

张 雪 程小红

(首都师范大学初等教育学院,北京 100048)

摘 要

基于平方数差数列,通过确定两个不同差数列对应平方数列的原始位置项,提出了求解丢番图《算术》中形如 $z^2+kx^2=(k+1)y^2(x<y<z)$ 不定方程的一般性解法.

关键词: 平方数,差数列,不定方程.

中图分类号: N09

1 问题的提出

古希腊数学家丢番图(Diophantus)的《算术》在数论的历史发展过程中,无疑是一部承前启后的划时代巨著[1],书中的问题和解法一直受到人们的关注. 他在第Ⅱ卷第 20 题中提出:求三个平方数,最大数与中间数之差和中间数与最小数之差的比为 3∶1. 这是一个求解形如 $z^2+3x^2=4y^2(x<y<z)$ 不定方程的问题,书中的解法是:设最小数为 x^2,中间数为 $(x+1)^2$,则最大数为 $x^2+8x+4=(x+3)^2$,故 $x=\frac{5}{2}$,那么这三个平方数分别为 $30\frac{1}{4}$,$12\frac{1}{4}$,$6\frac{1}{4}$,即 $\frac{121}{4}$,$\frac{49}{4}$,$\frac{25}{4}$.

显然上述解是分数,由于所求三数只要满足差值之比为某一值即可,所以上述结果与分母无关,如:$\frac{121}{9}$,$\frac{49}{9}$,$\frac{25}{9}$也满足题意,我们可以认为这三个平方数为 121,49,25. 因此在求解这一问题时,只需考虑正整数解即可.

和《算术》中其它大多数问题一样,所用方法未加概括,不具有一般性的意义[2,3],这就决定了丢番图方程求解的困难性[4]. 为此,本文对上述两差之比为任意正整数 k 的情形进行了探索,即针对不定方程 $z^2+kx^2=(k+1)y^2(x<y<z)$,提出了一种通用的求解方法.

收稿日期: 2015-03-11

2 平方数差数列定义及其性质

对于平方数形成的数列:$1^2,2^2,3^2,\cdots\cdots,n^2,\cdots\cdots$,我们把相隔 m 个数($m=0,1,2,\cdots\cdots$)的两个平方数之差顺次排列形成的数列定义为平方数差数列,m 称为间隔数. 如 $m=1$ 时的差数列是:8,12,16,20,……. 不难发现,平方数差数列有一个很重要的性质,即都是等差数列,如:

$m=0$ 时形成的差数列为公差等于 2 的等差数列,通项 $A_i=3+2(i-1)$ $(i\in Z^+)$;

$m=1$ 时形成的差数列为公差等于 4 的等差数列,通项 $A_i=8+4(i-1)$ $(i\in Z^+)$.

一般地,相隔 m 个数形成的差数列为公差等于 $2(m+1)$ 的等差数列,通项 $A_i=(m+2)^2-1+2(m+1)(i-1)$ $(i\in Z^+)$. 即

$$A_i=(m+1)(m+2i+1)\quad(i\in Z^+).\quad(1)$$

3 求解不定方程的方法

将《算术》第Ⅱ卷第 20 个问题的求解条件一般化,即最大数与中间数之差和中间数与最小数之差的比为任意正整数 k,则问题的求解即为求不定方程 $z^2+kx^2=(k+1)y^2$ 的正整数解. 不妨用 a,b,c 且 $a<b<c$ 表示我们要求解的三个平方数 x^2,y^2,z^2,其中 $x<y<z$,则有:

$$\frac{c-b}{b-a}=k(k=2,3,4,\cdots\cdots),\quad(2)$$

即 $b=a+\frac{c-a}{k+1}$,显然 $c-a$ 为 $k+1$ 的整数倍,

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令 $c-a=(k+1)n(n\in Z^+)$ (3)

所以, $b-a=n$. (4)

因为 $b-a$, $c-a$ 分别是两个不同平方数差数列的某一项,不妨设间隔数 m 分别等于 m_1, m_2,且 $m_2>m_1$. 因为两个差数列对应的平方数列是同一项 a,所以,在两个平方数差数列找到原始位置项 x 即可确定这三个平方数,即: x^2、$(x+m_1+1)^2$、$(x+m_2+1)^2$.

由差数列通项公式(1)得:

$A_{m1x}=(m_1+1)(m_1+2x+1)\quad(x\in Z^+)$,

$A_{m2x}=(m_2+1)(m_2+2x+1)\quad(x\in Z^+)$.

由(3)、(4)得: $A_{m2x}=(k+1)A_{m1x}$,

即 $(m_2+1)(m_2+2x+1)=(k+1)(m_1+1)(m_1+2x+1)$.

整理得: $$x=\frac{(m_2+1)^2-(k+1)(m_1+1)^2}{2(k+1)(m_1+1)-2(m_2+1)} \quad (5)$$

因为 $x>0$,所以

$$\frac{(m_2+1)^2-(k+1)(m_1+1)^2}{2(k+1)(m_1+1)-2(m_2+1)}>0.$$

解得: $\sqrt{k+1}(m_1+1)-1<m_2<(k+1)(m_1+1)-1$. (6)

给定 k 值,即可依据式(1)、(3)确定 m 的取值范围,亦即 m_1、m_2 的取值范围,分析可知,当 $k=3$ 时, $m_{(p)}=2p-1$; 当 $k\neq 3$ 时, $m_{(p)}=(k+1)p-1$. 若取 z 的最大限定值 $z_{\max}$,则当 $k=3$ 时, $p\leqslant\frac{z_{\max}}{2}-1$; 当 $k\neq 3$ 时, $p\leqslant\frac{z_{\max}-2}{k+1}$. 由式(6)确定 m_1、m_2 间的关系,由式(5)确定正整数 x,从而求出三个平方数. 如果给出最大数的限定值 $z_{\max}$,则可求出不定方程 $z^2+kx^2=(k+1)y^2(x<y<z)$ 的所有解.

4 求解方法验证

以 $k=3$ 为例,其中 $z_{\max}=50$,由上述分析可知: $m_{(p)}=2p-1$, $p\leqslant 24$,即 $m=1,3,5,\cdots\cdots,47$.

由式(6)得: $2m_1+1<m_2<4m_1+3$.

由(5)得: $x=\frac{(m_2+1)^2-(k+1)(m_1+1)^2}{8(m_1+1)-2(m_2+1)}$.

(Ⅰ)取 $m_1=1$,则 $3<m_2<7$,即 $m_2=5$, $x=\frac{(m_2+1)^2-8}{8-(m_2+1)}=5$ 则 $\{a,b,c\}=\{5^2,7^2,11^2\}$,此解即为《算术》中丢番图给出的解.

(Ⅱ)取 $m_1=3$,则 $7<m_2<15$,即 $m_2=9,11,13$,由 $x=\frac{(m_2+1)^2-64}{32-2(m_2+1)}$ 得: $x=3,10,33$. 则 $\{a,b,c\}=\{3^2,7^2,13^2\}$, $\{10^2,14^2,22^2\}$, $\{33^2,37^2,47^2\}$.

(Ⅲ)取 $m_1=5$,则 $11<m_2<23$,即 $m_2=15,17,19$,由 $x=\frac{(m_2+1)^2-144}{48-2(m_2+1)}$ 得: $x=7,15$,其中 $m_2=19$ 时 z 大于限定值,舍去. 则 $\{a,b,c\}=\{7^2,13^2,23^2\}$, $\{15^2,21^2,31^2\}$.

(Ⅳ)取 $m_1=7$,则 $15<m_2<31$,即 $m_2=17,19,\cdots\cdots,29$,由 $x=\frac{(m_2+1)^2-256}{64-2(m_2+1)}$ 得: 只有当 $m_2=19,23$ 时有符合题意的解,即 $x=6,20$. 则 $\{a,b,c\}=\{6^2,14^2,26^2\}$, $\{2^2,28^2,44^2\}$.

(Ⅴ)取 $m_1=9$,则 $19<m_2<39$,即 $m_2=21,23,\cdots\cdots,37$,由 $x=\frac{(m_2+1)^2-256}{80-2(m_2+1)}$ 得: 只有当 $m_2=27$ 时有符合题意的解,即 $x=16$. 则 $\{a,b,c\}=\{16^2,26^2,44^2\}$.

(Ⅵ)取 $m_1=11$,则 $23<m_2<47$,即 $m_2=25,27,\cdots\cdots,45$,由 $x=\frac{(m_2+1)^2-256}{96-2(m_2+1)}$ 得: 只有当 $m_2=29,31$ 时有符合题意的解,即 $x=9,14$. 则 $\{a,b,c\}=\{9^2,21^2,39^2\}$, $\{14^2,26^2,46^2\}$.

(Ⅶ)取 $m_1=13$,则 $27<m_2<55$,即 $m_2=29,31,\cdots\cdots,53$,由 $x=\frac{(m_2+1)^2-256}{112-2(m_2+1)}$ 得: 只有当 $m_2=31$ 时有符合题意的解,即 $x=5$. 则 $\{a,b,c\}=\{5^2,19^2,37^2\}$.

综上,当 $k=3$,且 z 的限定值为 50 时,不定方程 $z^2+kx^2=(k+1)y^2$ 共有 12 组解. 针对本解法我们编写了计算程序,程序框图如图 1 所示. 部分计算结果见下表.

5 结 论

对于不定方程 $z^2+kx^2=(k+1)y^2(x<y<z)$,当 $k=3$ 时,利用丢番图的解法可巧妙的求得一组特定解. 分析表明,通过设定不同的中间数、最大数,如分别设为 $(x+2)^2$、$(x+5)^2$ 等可以求得其它解,但当 k 为任意正整数时,则不具一般性.

本文通过定义平方数差数列,基于该数列是等差数列这一基本性质,将求解两个平方数差比的不定方程问题转化为求解两个差数列对应的特定位置

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

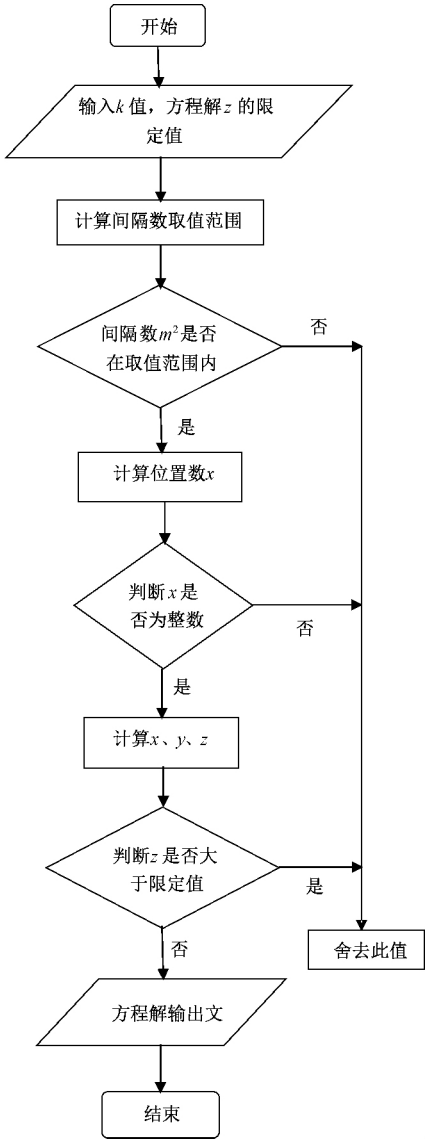


图 1　程序框图

k	间隔数 m_1	间隔数 m_2	z 的限定值	方程的解 x	y	z
5	5	17	100	3	9	21
		23		15	21	39
		29		57	63	87
	11	35		6	18	42
		41		15	27	57
		47		30	42	78
	17	47		3	21	51
		53		9	27	63
	23	71		12	36	84
8	8	44	300	18	27	63
		62		90	99	153
	17	89		36	54	126
		107		81	99	189
	26	134		54	81	189
	35	161		45	81	207
		179		72	108	252
	62	242		36	99	279
17	17	161	500	63	81	225
		215		189	207	405
	35	161		3	39	165
		215		27	63	243
		323		126	162	450
		341		153	189	495
	53	359		63	117	423
	71	323		6	78	330
		377		27	99	405
		431		54	126	486

项问题，结论如下:

1. 对求解形如 $z^2+kx^2=(k+1)y^2(x<y<z)$ 的不定方程，本方法具有一般性意义. 当给定 z 的限定值时，可求出不同 k 值时方程的全部解;

2. 本方法中，当间隔数 $m_1=0$，$m_2=2$ 时，即为丢番图的特定解法;

3. 本方法求出的正整数解，与任意平方数形成的分数解也是此类不定方程的解;

4. 本求解方法计算量小，易于编程求解.

参 考 文 献

[1] 杨宝珊. 丢番图的《算术》[J]. 自然辩证法通讯，2004，4: 78.

[2] M. 克莱因著. 张理京 张锦炎译. 古今数学思想 [M]. 上海科学技术出版社，1979，10: 162.

[3] 李文林. 数学史概论 [M]. 高等教育出版社，2011，2: 66.

[4] 陈晓化. 几类丢番图方程的研究 [D]. 西北大学硕士学位论文，2009，6: 3.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

A Study on a Indeterminate Equation of the Form $z^2 + kx^2 = (k+1)y^2$ in Diophantus' Arithmetic

Zhang Xue Cheng Xiaohong

(Elementary Educational College, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

Based on square number difference sequence, by determining the original number for two different difference sequence, a general method of resolution for indeterminate equation of the form $z^2 + kx^2 = (k+1)y^2 (x < y < z)$ in Diophantus' Arithmetic is proposed in this paper.

Key words: square number, difference sequence, indeterminate equation.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net