DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.01.002

首都师范大学学报(自然科学版)
第37卷 第1期 Journal of Capital Normal University No. 1
2016年2月 (Natural Science Edition) Feb., 2016

对 $2n+1$ 局 $n+1$ 胜体育赛制的认识*

石冶郝 林 玲

(首都师范大学初等教育学院,北京 100048)

摘 要

计算了"$2n+1$ 局 $n+1$ 胜"制下比赛局数的概率,认识到不同赛制对运动员比赛结果的影响.

关键词: 概率,赛制.

中图分类号: O21

1 引 例

甲、乙两个乒乓球运动员进行乒乓球比赛,假设每场比赛彼此独立,比赛中没有和局.已知每局甲胜的概率为0,6,乙胜的概率为0,4,比赛时可以用三局二胜或五局三胜制,问在哪一种比赛制度下,甲获胜的可能性较大?

解:(1)如果采用三局二胜制,则甲在下列两种情况获胜

A_1 -2:0(甲净胜两局);

A_2 -2:1(前两局甲、乙各胜一局,第三局甲胜);

$P(A_1)=0.6^2=0.36$,

$P(A_2)=C_2^1\times0.6\times0.4\times0.6=0.288$,

因 A_1 与 A_2 互斥,故甲获胜的概率为 $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.648$.

(2)如果采用五局三胜制,则甲在下列三种情况下获胜:

B_1 -3:0(甲净胜三局);

B_2 -3:1(前三局甲胜两局,负一局,第四局甲胜);

B_3 -3:2(前四局中甲、乙各胜两局,第五局甲胜);

$P(B_1)=0.6^3=0.216$,$P(B_2)=C_3^1\times0.6^2\times0.4\times0.6=0.2592$,

$P(B_3)=C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.6=0.20736$.

因此甲胜的概率为 $P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=0.68256$.

由(1)、(2)的结果知,甲在五局三胜制中获胜的可能性更大.由此可以猜测,比赛局数增加,对强者有利.比赛局数越少,弱者侥幸获胜的可能性越大,速战速决会增加比赛结果的偶然性.

2 两个结论

结论1 甲乙进行某项比赛,设甲每局胜的概率为 p,乙每局胜的概率为 q,$p+q=1$,每场比赛彼此独立,比赛中没有和局,比赛规则是 $2n+1$ 局 $n+1$ 胜制(n 是自然数),用 $P(2n+1,n+1)$ 表示甲在 $2n+1$ 局 $n+1$ 制下最终胜出的概率,则 $P(2n+1,n+1)-P(2n-1,n)=C_{2n-1}^n p^n q^n(p-q)$.

证明 采用 $2n+1$ 局 $n+1$ 胜制,则甲在下列 $n+1$ 种情况下获胜:

C_1 -$(n+1)$:0(甲净胜 $n+1$ 局);

C_2 -$(n+1)$:1(前 $n+1$ 局甲胜 n 局,负1局,第 $n+2$ 局甲胜);

C_3 -$(n+1)$:2(前 $n+2$ 局中甲胜 n 局,负2局,第 $2n+1$ 局甲胜);

……

C_{n+1} -$(n+1)$:n(前 $2n$ 局中甲胜 n 局,负 n 局,第 $2n+1$ 局甲胜);

因此甲胜的概率

$P(2n+1,n+1)=P(C_1+C_2+\cdots+C_{n+1}=P(C_1)+P(C_2)+\cdots+P(C_{n+1})$,

收稿日期:2015-01-21

* 人才培养质量-教改立项项目-MOOC环境下的数学分析课程教学改革(项目代码026155659100/192)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= p^{n+1} + C_{n+1}^{1}p^{n+1}q + C_{n+2}^{2}p^{n+1}q^2 + \cdots + \cdots + C_{2n}^{n}p^{n+1}q^n, \quad (1)$$

$$q \cdot P(2n+1,n+1) = p^{n+1}q + C_{n+1}^{1}p^{n+1}q^2 + C_{n+2}^{2}p^{n+1}q^3 + \cdots + C_{2n-1}^{n-1}p^{n+1}q^n + C_{2n}^{n}p^{n+1}q^{n+1}. \quad (2)$$

(1) -(2) 即错位相减得

$$\begin{aligned}&(1-q)\cdot P(2n+1,n+1)\\ &= p^{n+1} + (C_{n+1}^{1}-1)p^{n+1}q + (C_{n+2}^{2}-C_{n+1}^{2})p^{n+1}q^2 + \cdots + (C_{2n}^{n}-C_{2n-1}^{n-1})p^{n+1}q^n - C_{2n}^{n}p^{n+1}q^{n+1}\\ &= p(p^n + C_n^1p^nq + \cdots + C_{2n-2}^{n-1}p^nq^{n-1}) + \cdots + C_{2n-1}^{n}p^{n+1}q^n - C_{2n}^{n}p^{n+1}q^{n+1}\\ &= p\cdot P(2n-1,n) + C_{2n-1}^{n}p^{n+1}q^n(1-2q)\\ &= p\cdot P(2n-1^n,n) + C_{2n-1}^{n}p^{n+1}q^n - 2C_{2n-1}^{n}p^{n+1}q^{n+1},\end{aligned}$$

其中 $P(2n-1,n) = p^n + C_n^1p^nq + C_{n+1}^2p^nq^2 + \cdots + C_{2n-2}^{n}p^nq^{n-1}$,

则 $(1-q)\cdot P(2n+1,n+1) = p\cdot P(2n-1,n) + C_{2n-1}^{n}p^{n+1}q^n(1-2q)$.

利用 $p+q=1$,整理有

$$P(2n+1,n+1) - P(2n-1,n) = C_{2n-1}^{n}p^nq^n(p-q).$$

说明 (1) 当 $p=q=\frac{1}{2}$,$P(2n+1,n+1) = P(2n-1,n) = P(1,1) = \frac{1}{2}$,即甲乙每局比赛水平相当时,无论何种赛制,甲、乙最终获胜的概率是相同的,都是 $\frac{1}{2}$. 说明 $2n+1$ 局 $n+1$ 胜制是公平的比赛制度;

(2) 当 $p>q$ 时,即 $p>1/2$ 时,$P(2n+1,n+1) > P(2n-1,n)$,水平高的选手获胜的概率随着比赛总局数的增加而增大,同理水平低的选手获胜的概率随着比赛总局数的增加而减少;

利用 $P(2n+1,n+1) - P(2n-1,n) = C_{2n-1}^{n}p^nq^n(p-q)$ 的关系,当 $p=0.6$ 时,列出下表(保留四位小数):

$n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	…
$2n+1$	1	3	5	7	9	11	13	15	…
$P(2n+1,n+1)$	0.6	0.648	0.6826	0.7102	0.7334	0.7535	0.7712	0.7869	…

结论 2 甲乙进行某项比赛,设甲每局胜的概率为 $p=\frac{1}{2}+x$,乙每局胜的概率为 $q=\frac{1}{2}-x$,$0<x<\frac{1}{2}$,每场比赛彼此独立,比赛规则是 $2n+1$ 局 $n+1$ 胜制(n 是自然数),用 $P(2n+1,n+1)$ 表示甲在 $2n+1$ 局 $n+1$ 制下最终胜出的概率,则

$P(2n+1,n+1) - P(2n-1,n) = C_{2n-1}^{n}p^nq^n(p-q)$ 的最大值是 $C_{2n-1}^{n}\left(\frac{n}{4n+2}\right)^n\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$.

证明 设 $f_n(x) = C_{2n-1}^{n}\left(\frac{1}{2}+x\right)^n\left(\frac{1}{2}-x\right)^n(2x) = 2C_{2n-1}^{n}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)^n x$,$0<x<\frac{1}{2}$,则 $f'_n(x) = C_{2n-1}^{n}\left(\frac{1}{4}-x^2\right)^{n-1}\left[\frac{1}{2}-(4n+2)x^2\right]$,

令 $f'_n(x)=0$,得 $x^2=\frac{1}{2(4n+2)}$,$x=\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}}$,

当 $0<x<\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}}$ 时,$f'_n(x)>0$,$f'_n(x)$ 在 $\left(0,\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}}\right)$ 递增,

当 $\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}}<x<\frac{1}{2}$ 时,$f'_n(x)<0$,$f'_n(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}},\frac{1}{2}\right)$ 递减,

因此 $x=\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}}$ 是 $f'_n(x)$ 在 $0<x<\frac{1}{2}$ 上的最大值点,

最大值为 $f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2(4n+2)}}\right) = C_{2n-1}^{n}\left(\frac{n}{4n+2}\right)^n\sqrt{\frac{1}{2n+1}}$.

说明 当 $n=1,2,3,4,5,6,7,8$ 时,计算最大值依次为

$\mathrm{MAX}f_1 = 0.096\,225\,0$(三局两胜比一局一胜增加的概率最大值),

$\mathrm{MAX}f_2 = 0.053\,665\,6$(五局三胜比三局两胜增加的概率最大值),

$\mathrm{MAX}f_3 = 0.037\,190\,4$(七局四胜比五局三胜增加的概率最大值),

$\mathrm{MAX}f_4 = 0.028\,451\,0$(九局五胜比七局四胜增

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

加的概率最大值)，

$\mathrm{MAX}f_5 = 0.011\ 511\ 8$(十一局六胜比九局五胜增加的概率最大值)，

$\mathrm{MAX}f_6 = 0.019\ 352\ 6$(十三局七胜比十一局六胜增加的概率最大值)，

$\mathrm{MAX}f_7 = 0.016\ 684\ 3$(十五局八胜比十三局七胜增加的概率最大值)，

$\mathrm{MAX}f_8 = 0.014\ 662\ 6$(十七局九胜比十五局八胜增加的概率最大值).

由此看出，随着比赛的局数增加，概率最大值的增加幅度非常小，又一场比赛不能占用太长的时间，因此体育比赛中最常见的规则如三局两胜、五局三胜、七局四胜，基本上可以反映出双方的真实水平.

多局决胜的目的通常是减少偶然因素对比赛结果的影响，使得比赛的结果能更好地反映双方的真实水平. 在桥牌比赛中，如果仅仅凭一手牌定输赢，显然是荒谬的. 然而某些现实因素经常使得多局决胜不可行. 如在职业拳击赛中，比赛场次过多回严重损伤运动员的身体. 在世界杯足球赛中，如果采取多局决胜制，比赛结果反映的可能不是双方的球艺水平，而是身体的耐力. 面临实际的抉择时，概率的理论知识往往让位一些更现实的考虑，赛程的长短必须合理，必须保证对参赛者和观众的吸引力.

参 考 文 献

[1] 李大强译. 机会的数学原理. [英] 约翰黑格著. 吉林人民出版社，2001.

Understanding of Best – $(n+1)$ – of – $(2n+1)$ Competition

Shi Yehao　Lin Ling

(Elementary Educational College, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract

This paper gives probability of mathematical expectation in competition according to the rule that either of teams winning $n+1$ rounds first will win. Thus we recognize that the effects on the athletes by the different match system.

Key words: probability, match systems.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net