DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.04.001



# 关于数论函数方程 $c_r(n^k)=\varphi(n)$ *

王明军

(渭南师范学院数理学院,陕西 渭南 714000)

**摘 要**

对任意正整数 $n$,设 $c_r(n)$ 表示 $n$ 的立方剩余数,$\varphi(n)$ 为 Euler 函数. 本文的主要目的是利用初等方法研究方程 $c_r(n)=\varphi(n)$ 和 $c_r(n^k)=\varphi(n)$ 的解的个数,并给出了它们的全部解.

**关键词:** 立方剩余数,Euler 函数,方程.

**中图分类号:** O156.4

## 1 引言及结论

文献[1]中,F. Smarandache 教授引入了立方剩余数的概念:设 $n$ 为任一正整数,称 $c_r(n)$ 为 $n$ 的立方剩余数,如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 是 $n$ 的标准分解式,其中 $p_i$ 是素数且 $\alpha_i\geqslant 1$,那么 $c_r(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_r^{\beta_r}$,$\beta_i=\min(2,\alpha_i)$. 关于立方剩余数的性质已有许多学者进行了研究. 文[2]中,作者给出了立方剩余数的均值公式

$$\sum_{n\leqslant x}b(n)=\frac{c_2}{2}x^2+O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}\ln^2 x),$$

其中,$c_2=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2(1+p)}\right)$.

文[3]中,作者进一步证明了立方剩余数的 $k$ 次幂的均值公式;文[4]给出了 $m$ 次幂剩余数的两个渐近公式.

关于包含 Euler 函数的数论函数方程的研究,也有许多较好的结果. 文[5]中作者证明了方程 $\varphi(n)=4^{\omega(n)}$ 有 10 个解,分别是:1,8,5,34,170,204,1 020,40,48,240. 文[6]中,作者证明了方程 $\varphi(\varphi(n))=2^{\Omega(n)}$ 成立当且仅当 $n$ 为奇数时,$n=1$,5,7,15,21,45;当且仅当 $n$ 为偶数时,$n=2^{\alpha}11$,$2^{\alpha}13$,$2^{\alpha}25$,$2^{\alpha}33$,$2^{\alpha}35$,$2^{\alpha}39$,$2^{\alpha}75$,$2^{\alpha}105$,$2^{\alpha}225$,其中 $\alpha\geqslant 1$ 为任意正整数. 包含 Euler 函数的数论函数方程还有好多:$\varphi(n)=\mathrm{SL}(n)$,其中 $\mathrm{SL}(n)$ 表示 Smarandache LCM 函数;$\varphi(n)=\mathrm{Sp}(n)$,$\mathrm{Sp}(n)$ 表示 Smarandache 幂函数,等等.

本文的主要目的是利用初等方法研究方程 $c_r(n)=\varphi(n)$ 和 $c_r(n^k)=\varphi(n)$ 的解的个数,并给出了它们的全部解,得到下面的定理.

**定理 1** 设 $c_r(n)$ 表示 $n$ 的立方剩余数,则方程 $c_r(n)=\varphi(n)$ 共有四个正整数解,它们是 $n=1$,8,54,108.

**定理 2** 设 $c_r(n)$ 表示 $n$ 的立方剩余数,$k\geqslant 2$ 是给定的正整数,则方程 $c_r(n^k)=\varphi(n)$ 共有四个正整数解,它们是 $n=1$,8,108,250.

## 2 定理的证明

首先证明定理 1. 显然 $n=1$ 是方程的解. 设 $n>1$,则 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,根据 $c_r(n)$ 和 $\varphi(n)$ 的定义我们有:

$$\varphi(n)=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1),$$

$$c_r(n)=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k},\beta_i=\min\{2,\alpha_i\},i=1,2,\cdots,k.$$

下面分四种情况进行讨论:

(1) 若存在某 $\alpha_i>3$ 时,则 $\alpha_i-1\geqslant 3$,$\beta_i=2$,根据 $c_r(n)$ 和 $\varphi(n)$ 的定义知 $c_r(n)\neq\varphi(n)$,此时方程 $c_r(n)=\varphi(n)$ 无解.

(2) 若 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=3$,则有

$$c_r(n)=p_1^2p_2^2\cdots p_k^2,$$

$$\varphi(n)=p_1^2(p_1-1)p_2^2(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1).$$

方程 $p_1^2p_2^2\cdots p_k^2=p_1^2(p_1-1)p_2^2(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1)$

收稿日期:2016-09-26

* 陕西省科技厅自然科学基金项目(2013JM10106),省扶持学科数学学科基金资助(14SXZD018).



(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

要有解,则有 $n = 2^3$. 因此这种情形方程 $c_r(n) = \varphi(n)$ 有解 $n = 2^3$.

(3) 若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\} < 3$ 时,由 $c_r(n)$ 的定义知 $\beta_k = \alpha_k$,由 $\varphi(n)$ 的定义知 $p_i$ 的指数为 $\alpha_k - 1$,显然 $\alpha_k > \alpha_k - 1$. 此时方程无解.

(4) 若存在 $\alpha_i = 3, \alpha_j < 3$,由 $c_r(n)$ 和 $\varphi(n)$ 的定义及方程知 $p_1 = 2$,否则 $c_r(n)$ 是奇数,$\varphi(n)$ 是偶数.

若 $\alpha_k = 1$,则 $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(p_{k-1}-1)(p_k-1)$,$\varphi(n)$ 中不含因数 $p_k$,而 $c_r(n) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k$,$c_r(n)$ 中含有因数 $p_k$,因此两者不可能相等.

若 $\alpha_k = 2$,则 $\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(p_{k-1}-1)p_k(p_k-1)$,$\varphi(n)$ 中含因数 $p_k$,而 $c_r(n) = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^2$,$c_r(n)$ 中含有因数 $p_k^2$,因此两者不可能相等. 因此,$\alpha_k = 3$.

若 $\alpha_1 = 3$,则 $n = 8$,同情形(2).

若 $\alpha_1 < 3$,$\varphi(n) = 2^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1) = 2^{\alpha_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_k^2 = c_r(n)$,即 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1) = 2p_2^{\beta_2}\cdots p_k^2$. 注意到右边含有一个因数 2,所以左边只能含有一个 $p_i - 1$,因此 $n = 2^\alpha p^3(\alpha = 1,2)$. $c_r(2^\alpha p^3) = \varphi(2^\alpha p^3) \Leftrightarrow 2^\alpha p^2 = 2^{\alpha-1}p^2(p-1) \Leftrightarrow 2 = p - 1 \Leftrightarrow p = 3$.

因此可得: $n = 2^1 3^3 = 54$,或者 $n = 2^2 3^3 = 108$.

综上所述,方程 $c_r(n) = \varphi(n)$ 共有四个正整数解,它们是 $n = 1, 8, 54, 108$. 这样就完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明. 显然 $n = 1$ 是方程的解. 设 $n > 1$,则 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,根据 $c_r(n)$ 和 $\varphi(n)$ 的定义我们有:

$c_r(n^k) = p_1^2p_2^2\cdots p_k^2$,

$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^{\alpha_k-1}(p_k-1)$.

下面分四种情况进行讨论:

(1) 若存在某 $\alpha_i > 3$,则 $\alpha_i - 1 \geqslant 3$,显然 $c_r(n^k) \neq \varphi(n)$,此时方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$ 无解.

(2) 若 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 3$,方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$. 即

$p_1^2p_2^2\cdots p_k^2 = p_1^2(p_1-1)p_2^2(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1)$.

上式成立的充要条件是 $n = 2^3$. 因此这种情形方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$ 有解 $n = 2^3$.

(3) 若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{\alpha_i\} < 3$,在 $c_r(n^k)$ 的表达式中 $p_i$ 的指数为 2,在 $\varphi(n)$ 的表达式中 $p_i$ 的指数为 $\alpha_i - 1$,由于 $\alpha_i - 1 < 2$,所以 $c_r(n^k) \neq \varphi(n)$. 方程无解.

(4) 若存在 $\alpha_i = 3, \alpha_j < 3$,由 $c_r(n^k)$ 和 $\varphi(n)$ 的表达式及方程知 $p_1 = 2$,否则 $c_r(n^k)$ 是奇数,$\varphi(n)$ 是偶数.

当 $\alpha_k = 1$ 时,$c_r(n^k) = p_1^2p_2^2\cdots p_k^2$,$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(p_{k-1}-1)(p_k-1)$,$c_r(n^k)$ 中含有因数 $p_k^2$,而 $\varphi(n)$ 中不含因数 $p_k$,所以 $c_r(n^k) \neq \varphi(n)$;

当 $\alpha_k = 2$ 时,$c_r(n^k) = p_1^2p_2^2\cdots p_k^2$,$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}-1}(p_{k-1}-1)p_k(p_k-1)$,$c_r(n^k)$ 中含有因数 $p_k^2$,而 $\varphi(n)$ 中含因数 $p_k$,所以 $c_r(n^k) \neq \varphi(n)$. 因此,$\alpha_k = 3$.

若 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$,则 $c_r(n^k) = 2^2p_2^2\cdots p_k^2$,$\varphi(n) = (p_2-1)p_3^{\alpha_3-1}(p_3-1)\cdots p_k^2(p_k-1)$,$c_r(n^k)$ 中含有因数 $p_2^2$,而 $\varphi(n)$ 中不含因数 $p_2$,所以 $c_r(n^k) \neq \varphi(n)$;

若 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2$,则 $c_r(n^k) = 2^2p_2^2\cdots p_k^2$,$\varphi(n) = p_2(p_2-1)p_3^{\alpha_3-1}(p_3-1)\cdots p_k^2(p_k-1)$ $c_r(n^k)$ 中含有因数 $p_2^2$. 而 $\varphi(n)$ 中含因数 $p_2$,所以 $c_r(n^k) \neq \varphi(n)$. 由此可得 $\alpha_2 = 3$. 因而 $n = 2p^3$,由 $2^2p^2 = p^2(p-1)$,可得 $p = 5$,此时方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$ 有解: $n = 2 \times 5^3 = 250$.

若 $\alpha_1 = 2$,由于 $c_r(n^k) = 2^2p_2^2\cdots p_k^2$,$\varphi(n) = 2p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1)$,方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$ 可化为 $p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\cdots p_k^2(p_k-1) = 2p_2^2\cdots p_k^2$. 因为方程右边含有因数 2,方程要有解则 $n$ 有以下形式: $n = 2p^3$,由 $2^2p^2 = 2p^2(p-1)$,解得 $p = 3$. 所以此时方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$ 有解: $n = 2^2 \times 3^3 = 108$.

若 $\alpha_1 = 3$,则 $n = 8$,同情形(2).

综合(1)(2)(3)(4)可知,方程 $c_r(n^k) = \varphi(n)$ 共有四个正整数解,它们是 $n = 1, 8, 108, 250$. 这样就完成了定理 2 的证明.



(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

## 参 考 文 献


[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] 苟素. 关于平方及立方剩余数的均值 [J]. 西安邮电学院学报, 2003, 8(4): 99 – 100.

[3] 王明军, 刘炳全. 关于平方与立方剩余数的均值 [J]. 江西科学, 2008, 26(5): 687 – 689.

[4] 高丽, 葛丹, 杨海. 关于 $m$ 次剩余数的两个渐近公式 [J]. 延安大学学报: 自然科学版, 2004, 23(3): 1 – 4.

[5] 李怡君, 李育生. 关于一类包含欧拉函数的方程 [J]. 数学季刊, 2009, 24(4): 605 – 608.

[6] 田呈亮, 付静, 白维祖. 一个包含欧拉函数的方程 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2010, 26(1): 96 – 98.

[7] Apostol T M. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Springer, 1976.

[8] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[9] 王明军. 关于两个可乘函数的均值 [J]. 首都师范大学学报: 自然科学版, 2016, 37(3): 11 – 13.


# On the Arithmetical Function $c_r(n^k)=\varphi(n)$


Wang Mingjun

(College of Mathematical and Physical Sciences, Weinan Normal University, Weinan Shaanxi 714000)



**Abstract**

For any positive integer $n$, let $c_r(n)$ be the Smarandache cubical residues function, and $\varphi(n)$ denotes the Euler function of $n$. The main purpose of this paper is using the elementary method to study the number of the solutions of the equations $c_r(n)=\varphi(n)$ and $c_r(n^k)=\varphi(n)$, and to give all solutions for these two equations.



**Key words:** cubical residue, Euler function, equation.




(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net