DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.04.002

(φ,ψ)凸函数的一个充要条件

时统业 朱 璟 李 鼎
(海军指挥学院信息系,江苏 南京 211800)

摘 要

作为凸函数的推广,引入(φ,ψ)凸函数的概念. 利用凸函数的Jensen不等式和(φ,ψ)凸函数的定义,建立了(φ,ψ)凸函数的Hermite-Hadamard型不等式. 借助(φ,ψ)凸函数的Hermite-Hadamard型不等式给出(φ,ψ)凸函数的一个充要条件.

关键词: (φ,ψ)凸函数,Hermite-Hadamard型不等式,充分必要条件.
中图分类号: O174.13,O178

本文将复合函数$f(g(x))$记作$f\circ g(x)$. 正数c,d的对数平均记为$L(c,d)$,即

$$L(c,d)=\begin{cases}\dfrac{c-d}{\ln c-\ln d}, & c\neq d,\\ c, & c=d.\end{cases}$$

定义1 设I,J为区间,φ和ψ分别是I和J上的严格单调的连续函数,$f:I\to J$,如果对任意$x,y\in I$,$t\in(0,1)$,有

$$f\circ\varphi^{-1}(t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y))\leqslant(\geqslant)\ \psi^{-1}(t\psi\circ f(x)+(1-t)\psi\circ f(y)),$$

则称f在区间I上是(φ,ψ)凸(凹)函数.

若$\varphi=\psi=x$,则(φ,ψ)凸(凹)函数即通常的凸(凹)函数[1]. 若$\varphi=\psi$,且$I\subset J$,则(φ,ψ)凸函数即$\varphi(x)$凸函数[2].

当$I\subseteq(0,+\infty)$时,(φ,ψ)凸(凹)函数是GA-凸(凹)函数[3]($\varphi(x)=\ln x,\psi(x)=x$)、HA-凸(凹)函数[4-5]($\varphi(x)=x^{-1},\psi(x)=x$)的推广.

当$J\subseteq(0,+\infty)$时,(φ,ψ)凸(凹)函数是AH-凸(凹)函数[6-7]($\varphi(x)=x,\psi(x)=x^{-1}$)、对数凸(凹)函数[8]($\varphi(x)=x,\psi(x)=\ln x$)的推广.

当$I\subseteq(0,+\infty)$,$J\subseteq(0,+\infty)$时,(φ,ψ)凸函数是几何凸函数[9]($\varphi(x)=\psi(x)=\ln x$)、GH凸函数[10]($\varphi(x)=\ln x,\psi(x)=x^{-1}$)、HG凸函数[11]($\varphi(x)=x^{-1},\psi(x)=\ln x$)、GM凸函数[12]($\varphi(x)=\ln x,\psi(x)=x^{r}$)的推广.

收稿日期: 2016-09-14

文献[13]借助几何凸函数的Hermite-Hadamard型不等式,给出连续的几何凸函数的一个充要条件.

定理1[13] 设$f:[a,b]\subseteq(0,+\infty)\to(0,+\infty)$是连续函数,则$f$为几何凸(凹)函数的充要条件为:任取$[a,b]$两点$c,d,c<d$时,有

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(\geqslant)\ \frac{L[f(c),f(d)]}{L(c,d)}.$$

文献[14]仿照文献[13]的方法,借助GA-凸函数的Hermite-Hadamard型不等式给出GA-凸函数的一个充要条件.

定理2[14] 设f是$[a,b]\subseteq(0,+\infty)$上的连续函数,则$f$为GA-凸函数的充要条件为:任取$[a,b]$两点$c,d,c<d$时,有$\frac{1}{d-c}\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{d-c}\{[L(c,d)-c]f(c)+[d-L(c,d)]f(d)\}$.

定理3 ((φ,ψ)凸函数的Hermite-Hadmard型不等式) 设J是区间,ψ是J上的严格单调增加的连续函数,φ是$[a,b]$上的单调连续函数,$f:[a,b]\to J$是连续函数. 若f是$[a,b]$上的(φ,ψ)凸(凹)函数,则有

$$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\leqslant(\geqslant)\ \frac{1}{b-a}\int_a^b\psi\circ f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(\geqslant)\ \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\times\left[\left(\varphi(b)-\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\psi\circ f(a)+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\varphi(a)\right)\psi\circ f(b)\right].\qquad(1)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

证明　因 f 是区间 $[a,b]$ 上的 (φ,ψ) 凸(凹)函数,且 ψ 在 J 上严格单调增加,由定义 1,对任意 x, $y\in[a,b]$, $t\in(0,1)$,有

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y))\leqslant(\geqslant)\\&\quad t\psi\circ f(x)+(1-t)\psi\circ f(y)=\\&t\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))+(1-t)\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\varphi(y)),\end{aligned}\tag{2}$$

故 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是以 $\varphi(a)$ 和 $\varphi(b)$ 为端点的区间上的凸(凹)函数,由积分形式的 Jensen 不等式[15]有

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)\\&\leqslant(\geqslant)\ \frac{1}{b-a}\int_a^b\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

也即式(1)的左边不等式成立.

在式(2)中取 $x=a$, $y=b$,则对任意 $t\in[0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b))\\&\leqslant(\geqslant)\ t\psi\circ f(a)+(1-t)\psi\circ f(b),\end{aligned}$$

这等价于对任意 $x\in[a,b]$ 有

$$\begin{aligned}\psi\circ f(x)\leqslant(\geqslant)\ &\psi\circ f(a)\frac{\varphi(b)-\varphi(x)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\\&+\psi\circ f(b)\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)},\end{aligned}$$

在上式中对 x 在 $[a,b]$ 上积分,则式(1)的右边部分得证.

注 1　在定理 3 中,若 ψ 是 J 上的严格单调减少的连续函数,则式(1)的不等号反向.

例 1　在定理 3 中,取 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$, $J=(0,+\infty)$, $\varphi(x)=\ln x$, $\psi(x)=\ln x$,则有

$$\begin{aligned}&\ln f\left(\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\mathrm{d}x\right)\right)\\&\leqslant(\geqslant)\ \frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x\\&\leqslant(\geqslant)\ \left(\ln b-\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\mathrm{d}x\right)\ln f(a)\\&\quad+\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\mathrm{d}x-\ln a\right)\ln f(b),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln x\mathrm{d}x&=\frac{b\ln b-a\ln a}{b-a}-1\\&=\frac{1}{b-a}\cdot\ln\left(\left(\frac{1}{e}\right)^{b-a}\frac{b^b}{a^a}\right),\end{aligned}$$

于是得到几何凸(凹)函数的几何平均型 Hermite-Hadamard 型不等式[16]:

$$\begin{aligned}&f\left[\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right]\leqslant(\geqslant)\ \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x\right]\\&\leqslant(\geqslant)\ [f(a)]^{\frac{1}{\ln b-\ln a}-\frac{a}{b-a}}[f(b)]^{\frac{b}{b-a}-\frac{1}{\ln b-\ln a}}.\end{aligned}$$

本文仍然仿照文献[13]的方法,借助 (φ,ψ) 凸函数的 Hermite-Hadmard 型不等式给出 (φ,ψ) 凸函数的一个充要条件.

定理 4　设 J 是区间,ψ 是 J 上的严格单调增加的连续函数,φ 是 $[a,b]$ 上的严格单调的连续函数, $f:[a,b]\to J$ 是连续函数,则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的 (φ,ψ) 凸(凹)函数当且仅当对任意 $c,d\in[a,b]$, $c<d$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{d-c}\int_c^d\psi\circ f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant(\geqslant)\ &\frac{1}{\varphi(d)-\varphi(c)}\times\\&\left\{\psi\circ f(c)\left[\varphi(d)-\frac{1}{d-c}\int_c^d\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right]+\right.\\&\left.\psi\circ f(d)\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\varphi(c)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{3}$$

证明　只证明 f 是 (φ,ψ) 凸函数的充要条件,同理可证 (φ,ψ) 凹函数的充要条件. 必要性由定理 3 立得. 下面用反证法证明充分性. 假设 $f(x)$ 不是 $[a,b]$ 上的 (φ,ψ) 凸函数,则存在 $u,v\in[a,b]$, $u<v$,及 $t_0\in(0,1)$,使得

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t_0\varphi(u)+(1-t_0)\varphi(v))\\&>t_0\psi\circ f(u)+(1-t_0)\psi\circ f(v),\end{aligned}$$

因为 φ^{-1}, ψ, f 都是连续的,所以存在 $(t_1,t_2)\subseteq(0,1)$,当 $t\in(t_1,t_2)$ 时有

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v))\\&>t\psi\circ f(u)+(1-t)\psi\circ f(v),\end{aligned}\tag{4}$$

而且对 $i=1,2$ 有

$$\begin{aligned}&\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t_i\varphi(u)+(1-t_i)\varphi(v))\\&=t_i\psi\circ f(u)+(1-t_i)\psi\circ f(v).\end{aligned}\tag{5}$$

不妨设

$$\begin{aligned}c&=\varphi^{-1}(t_2\varphi(u)+(1-t_2)\varphi(v)),\\d&=\varphi^{-1}(t_1\varphi(u)+(1-t_1)\varphi(v)),\end{aligned}$$

也即

$$t_1=\frac{\varphi(v)-\varphi(d)}{\varphi(v)-\varphi(u)},\ t_2=\frac{\varphi(v)-\varphi(c)}{\varphi(v)-\varphi(u)}.$$

由于 φ 严格单调,所以有 $u<c<d<v$. 由式(5)得

$$\begin{aligned}&\psi\circ f(d)\\&=\frac{\psi\circ f(u)[\varphi(v)-\varphi(d)]+\psi\circ f(v)[\varphi(d)-\varphi(u)]}{\varphi(v)-\varphi(u)},\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}&\psi\circ f(c)\\&=\frac{\psi\circ f(u)[\varphi(v)-\varphi(c)]+\psi\circ f(v)[\varphi(c)-\varphi(u)]}{\varphi(v)-\varphi(u)},\end{aligned}\tag{7}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由式(6)和(7)得

$$\frac{\psi\circ f(u)\,\varphi(v)-\psi\circ f(v)\,\varphi(u)}{\varphi(v)-\varphi(u)}=\frac{\psi\circ f(d)\,\varphi(c)-\psi\circ f(c)\,\varphi(d)}{\varphi(c)-\varphi(d)},\tag{8}$$

$$\frac{\psi\circ f(v)-\psi\circ f(u)}{\varphi(v)-\varphi(u)}=\frac{\psi\circ f(d)-\psi\circ f(c)}{\varphi(d)-\varphi(c)}.\tag{9}$$

在式(4)中令

$$\varphi^{-1}(t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v))=x,$$

即

$$t=\frac{\varphi(v)-\varphi(x)}{\varphi(v)-\varphi(u)}.$$

则当 $t\in(t_1,t_2)$ 时,式(4)成立等价于当 $x\in(c,d)$ 时有

$$\psi\circ f(x)>\psi\circ f(u)\,\frac{\varphi(v)-\varphi(x)}{\varphi(v)-\varphi(u)}+\psi\circ f(v)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(u)}{\varphi(v)-\varphi(u)}.$$

因为上式左右两边的函数都连续,所以由定积分的保号性质[17]并利用式(8),(9)得

$$\begin{aligned}\int_c^d\psi\circ f(x)\,\mathrm{d}x&>\int_c^d\left[\psi\circ f(u)\,\frac{\varphi(v)-\varphi(x)}{\varphi(v)-\varphi(u)}+\psi\circ f(v)\,\frac{\varphi(x)-\varphi(u)}{\varphi(v)-\varphi(u)}\right]\mathrm{d}x\\&=\frac{\psi\circ f(u)\,\varphi(v)-\psi\circ f(v)\,\varphi(u)}{\varphi(v)-\varphi(u)}(d-c)+\frac{\psi\circ f(v)-\psi\circ f(u)}{\varphi(v)-\varphi(u)}\cdot\int_c^d\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\psi\circ f(d)\,\varphi(c)-\psi\circ f(c)\,\varphi(d)}{\varphi(c)-\varphi(d)}(d-c)+\frac{\psi\circ f(d)-\psi\circ f(c)}{\varphi(d)-\varphi(c)}\cdot\int_c^d\varphi(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned}\frac{1}{d-c}\int_c^d\psi\circ f(t)\,\mathrm{d}t>{}&\frac{1}{\varphi(d)-\varphi(c)}\times\left\{\psi\circ f(c)\left[\varphi(d)-\frac{1}{d-c}\int_c^d\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right]\right.\\&\left.+\psi\circ f(d)\left[\frac{1}{d-c}\int_c^d\varphi(x)\,\mathrm{d}x-\varphi(c)\right]\right\},\end{aligned}$$

这与题设矛盾.充分性得证.

注 2 在定理 4 中,若 ψ 是 J 上的严格单调减少的连续函数,则式(3)的不等号反向.

例 2 设 f 是 $[a,b]$ 上正值的连续函数,则 f 是 $[a,b]$ 上的 AH 凸(凹)函数的充要条件是:对任意 $c,d\in[a,b]$,$c<d$,有

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(\leqslant)\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{f(c)}+\frac{1}{f(d)}\right].$$

证明 取 $I=[a,b]$,$J=(0,+\infty)$,$\varphi(x)=x$,$\psi(x)=x^{-1}$.因为 $\psi(x)$ 严格单调减少,由注 1 结论得证.

例 3 设 f 是 $[a,b]\subseteq(0,+\infty)$ 上正值的连续函数,则 f 是 $[a,b]$ 上的 HG 凸(凹)函数的充要条件是:对任意 $c,d\in[a,b]$,$c<d$,有

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d\ln f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant(\geqslant)\ \frac{cd}{d-c}\times\left\{\left[\frac{1}{L(c,d)}-\frac{1}{d}\right]\ln f(c)+\left[\frac{1}{c}-\frac{1}{L(c,d)}\right]\ln f(d)\right\}.$$

证明 取 $I=[a,b]$,$J=(0,+\infty)$,$\varphi(x)=x^{-1}$,$\psi(x)=\ln x$.因为 $\psi(x)$ 严格单调增加,由定理 4 结论得证.

参 考 文 献

[1] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法(第二版)[M].北京:高等教育出版社,2006:268.

[2] 胡长松.凸函数的一种推广[J].湖北师范学院学报:自然科学版,2006,26(1):6-10.

[3] 吴善和. GA-凸函数与琴生型不等式[J].贵州师范大学学报:自然科学版,2004,2(2):52-55.

[4] 宋振云. HA-凸函数及其 Jensen 型不等式[J].德州学院学报,2014,30(4):16-21.

[5] 陈少元. HA-凸函数及其判定与应用[J].湖北职业技术学院学报,2014,17(2):99-102.

[6] 张天宇,王淑红.关于算术调和凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式[J].内蒙古民族大学学报:自然科学版,2012,27(4):397-399.

[7] 陈少元. AH-凸函数及其应用[J].湖北职业技术学院学报,2013,16(2):106-109.

[8] 沈永欢,齐玉霞,张鸿林.简明数学词典[M].北京:新时代出版社,1989:258-259.

[9] 吴善和.几何凸函数与琴生型不等式[J].数学的实践与认识,2004,34(2):155-163.

[10] 陈少元. GH-凸函数及其 Jensen 型不等式[J].首都师范大学学报:自然科学版,2013,34(5):1-5.

[11] 陈少元,宋振云. HG-凸函数及其 Jensen 型不等式[J].数学的实践与认识,2013,43(2):257-264.

[12] 宋振云,陈少元. GM-凸函数及其 Jensen 型不等式[J].数学的实践与认识,2014,44(20):280-287.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[13] 张小明,褚玉明. 解析不等式新论 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社,2009: 144 – 145.
[14] 时统业,施未来,谢井. GA-凸函数的若干充要条件 [J]. 江苏教育学院学报: 自然科学版,2012,28(3): 22 – 24.
[15] 匡继昌. 常用不等式(第四版) [M]. 济南: 山东科学技术出版社,2010: 425 – 426.
[16] 宋振云,涂琼霞. 几何凸函数的几何平均型 Hadamard 不等式 [J]. 首都师范大学学报: 自然科学版,2011,32(4): 14 – 17.
[17] 张国铭. 定积分的一个性质及其应用 [J]. 高等数学研究,2010,13(1): 55 – 57.

A Sufficient and Necessary Condition of (φ,ψ) Convex Functions

Shi Tongye　Zhu Jing　Li Ding

(Department of Information,PLA Naval Command College,Nanjing Jiangsu　211800)

Abstract

The concept of (φ,ψ) convex functions is introduced as a generalization of convex functions. Hermite–Hadamard type inequality for (φ,ψ) convex functions is established by using Jensen inequality and the definition of (φ,ψ) convex functions. With the help of Hermite–Hadamard type inequality for (φ,ψ) convex functions, a sufficient and necessary condition of (φ,ψ) convex functions is obtained.

Key words: (φ,ψ) convex function, Hermite–Hadamard type inequality, sufficient and necessary condition.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net