DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.05.003

三元一阶常系数线性微分方程组的解构造*

赵 临 龙

(安康学院数学与统计学院,陕西 安康 725000)

摘 要

对三元一阶线性非齐次微分方程组 $x' = Ax + f(t)$ 的解法进行深入讨论,提出"行向量"概念,并且利用该概念给出其方程组解的本质结构.

关键词: 常系数线性微分方程组,代数线性方程,特征根.

中图分类号: O175.14

0 序 言

对于三元一阶线性微分方程组:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

一般都是用基解矩阵,先求出方程组(1)对应的齐次方程组的解,再利用常系数变异法求出方程组(1)的解,这些方法都比较繁琐.[1-14] 文献[15]对于 n 元一阶线性齐次微分方程组的解法进行研究,得到相关结论.本文将对三元一阶线性非齐次微分方程组解法进行深入讨论,给出其解的本质结构.

1 方程组(1)的解结构

对于方程组(1),设 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$, $f = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$, $K = (k_1, k_2, k_3)$,其中 k_1, k_2, k_3 是不全为零的常数,使得

$$Kx' = KAx + Kf \Leftrightarrow (k_1, k_2, k_3) \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = (k_1, k_2, k_3) A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + (k_1, k_2, k_3) \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$(k_1x_1' + k_2x_2' + k_3x_3') = (k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31})x_1 + (k_1a_{12} + k_2a_{22} + k_3a_{32})x_2 + (k_1a_{13} + k_2a_{23} + k_3a_{33})x_3 + (k_1f_1 + k_2f_2 + k_3f_3). \quad (5)$$

令

$$k_1a_{1i} + k_2a_{2i} + k_3a_{3i} = \lambda k_i \quad (i = 1,2,3, \lambda \text{ 为常数}) \quad (6)$$

$$\begin{cases} k_1a_{11} + k_2a_{21} + k_3a_{31} = \lambda k_1, \\ k_1a_{12} + k_2a_{22} + k_3a_{32} = \lambda k_2, \\ k_1a_{13} + k_2a_{23} + k_3a_{33} = \lambda k_3. \end{cases} \quad (7)$$

定义 1 对于常系数线性方程组(1),设 $U = (k_1, k_2, k_3)^{\mathrm{T}}$,其中 k_1, k_2, k_3 是不全为零的常数,使得

$$(A - \lambda E)^{\mathrm{T}}U = 0 \Leftrightarrow U^{\mathrm{T}}(A - \lambda E) = 0, \quad (8)$$

则方程 $|A - \lambda E| = 0$ 称为方程(1)的特征方程,而将满足(8)的 $K = (k_1, k_2, k_3)$ 称为特征根 λ 所对应的特征"行向量".

结论 1[15] 设 n 阶矩阵 A 的特征根 λ 的重数为 m,则方程组(1)对于常数列向量 u_1 的 $m-1$ 个广义列向量 $u_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 满足

$$\begin{cases} (A - \lambda E)u_m = 0, & (i = 1), \\ (A - \lambda E)u_{i-1} = u_i, & (i = 2,3,\cdots,m). \end{cases} \quad (9)$$

结论 2[3] 设 m 阶矩阵 A 的特征根 λ 的重数为 m,则

$$(A - \lambda E)^m = 0. \quad (10)$$

定理 1 如果常系数线性齐次方程组(1)的特征方程 $|(A - \lambda E)| = 0$ 有 3 个互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,而 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 对应的线性无关的特征行向量

收稿日期: 2017-08-14

* 陕西省教育厅科研项目(15JK1016);陕西省特色专业建设项目(2011-59);安康学院硕士点培育学科专项(2016AYXNZX009).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

分别为 $K_i=(k_{i1},k_{i2},k_{i3})(i=1,2,3)$,则(1)化为代数线性方程组

$$K_ix=C_1e^{\lambda_it}+e^{\lambda_it}\int(K_if)e^{-\lambda_it}dt\quad(i=1,2,3). \tag{11}$$

定理2 如果常系数线性齐次方程组(1)的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 有特征重根 $\lambda_i(i=1$ 或 $2)$,其重数分别为 $m_1,m_2,m_1+m_2=3$,而对应的线性无关的特征行向量为 $K_m,K_{m-1}(m=2$ 或 $3)$,则(1)化为一阶线性齐次方程

$$\begin{cases}(K_mx_m)'=\lambda_i(K_mx_m)+K_mf,\\ \qquad\qquad (K_m(A-\lambda_iE)=0),\\ (K_{m-1}x_{m-1})'=\lambda_i(K_{m-1}x_{m-1})+\\ \qquad K_{m-1}x_m+K_{m-1}f,\\ \qquad\qquad (K_{m-1}(A-\lambda_iE)^2=0),\end{cases} \tag{12}$$

其中特征根 λ_i 对应特征行向量为 K_i.

证明: 若方程组(1)的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 特征根为 λ_i,对应的线性无关的特征行向量 $K_i=(k_{i1},k_{i2},k_{i3})(i=1,2,3)$ 满足

$$K_i(A-\lambda_iE)=0,\quad(i=1,2,3). \tag{13}$$

则有代数线性方程

$$K_ix=C_1e^{\lambda_it}+e^{\lambda_it}\int(K_if)e^{-\lambda_it}dt,\quad(i=1,2,3). \tag{14}$$

即定理1获得证明.

现在,若方程组(1)的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 特征根 λ 为 m 重根,由结论1,得方程

$$(A-\lambda E)u_m=0. \tag{15.1}$$

$$(A-\lambda E)u_{m-1}=u_m. \tag{15.2}$$

对于方程组(1)的齐次形式 $x'=Ax$,在(15.2)中,其线性无关的解 $x_{m-1}=u_{m-1}e^{\lambda t}$、$x_m=u_me^{\lambda t}(m=2$ 或 $3)$ 满足方程

$$x'_{m-1}=Ax_{m-1}=\lambda Ex_{m-1}+x_m,\quad(m=2\text{ 或 }3). \tag{16}$$

1° 对于 $(A-\lambda_iE)x_m=0(i=1$ 或 $2)$,由定理1将方程组(1)化为一阶线性方程形式

$$(K_ix_m)'=\lambda_i(K_ix_m)+K_if, \tag{17}$$

其中特征根 λ_i 的对应特征行向量为 $K_i,i=1$ 或 2.

2° 对于 $(A-\lambda_iE)x_{m-1}=x_m(m=2$ 或 $3,i=1$ 或 $2)$,则

$$\begin{aligned}&x'_{m-1}=Ax_{m-1}=\lambda_ix_{m-1}+x_m,\\ &(m=2\text{ 或 }3;i=1\text{ 或 }2),\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $x_m(m=2$ 或 $3)$ 为满足(17)的解.

对于 x_{m-1} $(m=2$ 或 $3)$,结合(15.1)和(15.2),得到

$$(A-\lambda_iE)^mu_{m-1}=0,\quad(m=2\text{ 或 }3). \tag{19}$$

对于特征根 λ_i,取对应线性无关的特征行向量为 K_{m-1},有:

$$K_{m-1}(A-\lambda_iE)^m=0,\quad(m=2\text{ 或 }3,i=1\text{ 或 }2). \tag{20}$$

于是,有方程

$$K_{m-1}x'_{m-1}=K_{m-1}Ax_{m-1}+K_{m-1}f,(m=2\text{ 或 }3). \tag{21}$$

$$(K_{m-1}x_m)'=\lambda_i(K_{m-1}x_m)+K_{m-1}(A-\lambda_iE)x_{m-1}+K_{m-1}f. \tag{22}$$

此时,由(2°)得到

$$(K_{m-1}x_{m-1})'=\lambda_i(K_{m-1}x_{m-1})+K_{m-1}x_m+K_{m-1}f,\quad(m=2\text{ 或 }3,i=1\text{ 或 }2), \tag{23}$$

其中 x_m 为满足(17)的解.

即方程组(1)的化为以下形式

$$\begin{cases}(K_mx_m)'=\lambda_i(K_mx_m)+(K_mf),\\ \qquad\qquad (K_m(A-\lambda_iE)=0),\\ (K_{m-1}x_{m-1})'=\lambda_i(K_{m-1}x_{m-1})+K_{m-1}x_m+K_{m-1}f,\\ \qquad\qquad (K_{m-1}(A-\lambda_iE)^2=0),\end{cases} \tag{23}$$

其中特征根 λ_i 对应特征行向量为 $K_i,m=2$ 或 $3,i=1$ 或 2. 证得定理2.

此时,由 $K_i(A-\lambda_iE)^m=0(i=2$ 或 $3)$ 确定 K_i.

(1)若 $(A-\lambda_iE)^2\neq0(i=1)$,在(23)中,取 K_m 与 $K_{m-1}(m=2$ 或 $3)$ 构成线性无关的行向量,即可.

(2)若 $(A-\lambda_iE)^2=0(i=1)$,由结论,在(23)中,直接取取 K_m 与 $K_{m-1}(m=2$ 或 $3)$ 构成线性无关的行向量,即可. 最简单的是直接取单位分向量.

推论 如果常系数线性齐次方程组(1)的特征方程 $|A-\lambda E|=0$ 有特征根 λ 重数为3,而对应的线性无关的特征行向量为 K,若 $(A-\lambda E)^2=0$,则(1)化为一阶线性齐次方程

$$\begin{cases}(Kx_i)'=\lambda(Kx_i)+Kf,\quad(K(A-\lambda E)=0),\\ (K_Ix_{i-1})'=\lambda(K_Ix_{i-1})+K_Ix_i+K_If,\\ \qquad\qquad (K_I(A-\lambda E)^m=0),\end{cases} \tag{24}$$

其中 K_I 为取单位分向量(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)即可.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　方程组(1)解理论的应用

例 1[图]　**解方程组**

$$x' = Ax + f, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{pmatrix},$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, x(0) = 0.$$

解　由特征方程 $|A - \lambda E| = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$, 得到特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -3$.

设 $\lambda_1 = -1$ 所对应的特征行向量 $K_1 = (k_{11}, k_{12}, k_{13})$ 满足

$$K_1(A - \lambda E) = (k_{11}, k_{12}, k_{13}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{bmatrix} = 0,$$

$$k_{11} - 6k_{13} = 0, k_{11} + k_{12} - 11k_{13} = 0, k_{12} - 5k_{13} = 0.$$

求得 $K_1 = (6, 5, 1)$, 有方程

$$(6x_1 + 5x_2 + x_3)' = K_1 Ax + K_1 f = -6x_1 - 5x_2 - x_3 + e^{-t},$$

$$6x_1 + 5x_2 + x_3 = C_1 e^{-t} + te^{-t}. \quad (1.1)$$

设 $\lambda_2 = -2$ 所对应的特征行向量 $K_2 = (k_{21}, k_{22}, k_{23})$ 满足

$$K_2(A - \lambda E) = (k_{21}, k_{22}, k_{33}) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -11 & -4 \end{bmatrix} = 0,$$

$$2k_{21} - 6k_{23} = 0, k_{21} + 2k_{22} - 11k_{23} = 0, k_{22} - 4k_{23} = 0.$$

求得 $K_2 = (3, 4, 1)$, 有方程

$$(3x_1 + 4x_2 + x_3)' = K_2 Ax + K_2 f = -6x_1 - 8x_2 - 2x_3 + e^{-t},$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = C_2 e^{-2t} + e^{-t}. \quad (1.2)$$

设 $\lambda_3 = -3$ 所对应的特征行向量 $K_3 = (k_{31}, k_{32}, k_{33})$ 满足

$$K_3(A - \lambda E) = (k_{31}, k_{32}, k_{33}) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -6 & -11 & -3 \end{bmatrix} = 0,$$

$$3k_{31} - 6k_{33} = 0, k_{31} + 3k_{32} - 11, k_{33} = 0, k_{32} - 3k_{33} = 0.$$

求得 $K_3 = (2, 3, 1)$, 有方程

$$(2x_1 + 3x_2 + x_3)' = K_3 Ax + K_3 f = -6x_1 - 9x_2 - 3x_3 + e^{-t},$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = C_3 e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t}. \quad (1.3)$$

由(1.1)、(1.2)、(1.3), 得到初始条件: $x(0) = o$ 的方程组

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + x_3 = te^{-t}, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = -e^{-2t} + e^{-t}, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -\frac{1}{2} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t}. \end{cases}$$

于是, 求得原微分方程组的解

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2} te^{-t} - \frac{3}{4} e^{-t} + e^{-2t} - \frac{1}{4} e^{-3t} \\ -\frac{1}{2} te^{-t} + \frac{4}{5} e^{-t} - 2e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-3t}. \\ \frac{1}{2} te^{-t} - \frac{7}{4} e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{9}{4} e^{-3t} \end{cases}$$

例 2[图]　**解方程组**

$$x' = Ax + f, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (t - 5) e^{-t} \end{pmatrix}.$$

解　由特征方程 $|A - \lambda E| = -(\lambda + 1)^3 = 0$, 得到特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

设 $\lambda_1 = -1$ 所对应的特征行向量 $K_1 = (k_{11}, k_{12}, k_{13})$ 满足

$$K_1(A - \lambda E) = (k_{11}, k_{12}, k_{13}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$k_{11} - k_{13} = 0, k_{11} + k_{12} - 3k_{13} = 0, k_{12} - 2k_{13} = 0.$$

求得 $K_1 = (1, 2, 1)$, 有方程

$$(x_1 + 2x_2 + x_3)' = K_1 Ax + K_1 f = -(x_1 + 2x_2 + x_3) + (t - 5) e^{-t},$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = C_1 e^{-t} + \left(\frac{1}{2} t^2 - 5t\right) e^{-t}. \quad (2.1)$$

设 $\lambda_2 = -1$ 所对应的特征行向量 $K_2 = (k_{21}, k_{22}, k_{23})$ 满足

$$K_2 (A - \lambda E)^3 = (k_{21}, k_{22}, k_{23}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}^3 = (k_{21}, k_{22}, k_{33}) 0 = 0.$$

此时, 由于 $(A - \lambda E)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}^2 =$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$,取 $K_2 = (1,1,0)$,有方程

$$(x_1 + x_2)' = K_2Ax + K_2f = x_2 + x_3$$
$$= -(x_1 + x_2) + (x_1 + 2x_2 + x_3)$$
$$= -(x_1 + x_2) + C_1e^{-t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - 5t\right)e^{-t},$$

$$x_2 = (C_2 - C_3)e^{-t} + (C_1 - C_2)te^{-t} - C_1t^2e^{-t} + \left(\frac{3}{24}t^3 - \frac{5}{3}t^2\right)e^{-t}. \quad (2.2)$$

再取 $K_3 = (1,0,0)$,有方程

$$(x_1)' = K_3Ax + K_3f = x_2 = -x_1 + (x_1 + x_2)$$
$$= -x_1 + C_2e^{-t} + C_1te^{-t} + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{2}t^2\right)e^{-t},$$

$$x_1 = C_3e^{-t} + C_2te^{-t} + C_1t^2e^{-t} + \left(\frac{1}{24}t^4 - \frac{5}{6}t^3\right)e^{-t}. \quad (2.3)$$

由(2.1)、(2.2)、(2.3),得到方程组的解

$$x = \begin{cases} C_3e^{-t} + C_2te^{-t} + C_1t^2e^{-t} + \left(\frac{1}{24}t^4 - \frac{5}{6}t^3\right)e^{-t}, \\ (C_2 - C_3)e^{-t} + (C_1 - C_2)te^{-t} - C_1t^2e^{-t} + \left(\frac{3}{24}t^3 - \frac{5}{3}t^2\right)e^{-t}, \\ (C_1 - 2C_2 + C_3)e^{-t} - (2C_1 + C_2)te^{-t} + C_1t^2e^{-t} + \left(-\frac{1}{24}t^4 + \frac{7}{12}t^3 + \frac{23}{6}t^2 - 5t\right)e^{-t}. \end{cases}$$

例 3[13] 解方程组

$$x' = Ax, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

解 由特征方程 $|A - \lambda E| = -(\lambda - 3)^3 = 0$,得到特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

设 $\lambda_1 = 3$ 所对应的特征行向量 $k_1 = (k_{11}, k_{12}, k_{13})$ 满足

$$k_1(A - \lambda E) = (k_{11}, k_{12}, k_{13}) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$k_{11} + k_{12} = 0.$$

求得 $k_1 = (1, -1, 0)$,有方程

$$(x_1 - x_2)' = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2),$$
$$x_1 - x_2 = C_1e^{3t}. \quad (3.1)$$

设 $\lambda_2 = 3$ 所对应的特征行向量 $k_2 = (k_{21}, k_{22}, k_{23})$ 满足

$$k_2(A - \lambda E) = (k_{21}, k_{22}, k_{23}) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$$
$$= (k_{21}, k_{22}, k_{33})0 = 0.$$

此时,由于 $(A - \lambda E)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$,直接取单位分向量 $k_2 = (0,0,1)$,有方程

$$(x_3)' = K_2Ax = 3x_3,$$
$$x_3 = C_2e^{3t}. \quad (3.2)$$

再取单位分向量 $k_3 = (1,0,0)$,有方程

$$(x_1)' = K_3Ax = 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3x_1 - (x_1 - x_2) + 2x_3 = 3x_1 - C_1e^{3t} + 2C_2e^{3t},$$

$$x_1 = C_3e^{3t} + e^{3t}\int(-C_1e^{3t} + 2C_2e^{3t})e^{-3t}dt = C_3e^{3t} - C_1te^{3t} + 2C_2te^{3t}. \quad (3.3)$$

由(3.1)、(3.2)、(3.3),得到方程组的解

$$x = \begin{cases} C_3e^{3t} + (2C_2 - C_1)te^{3t} \\ (C_3 - C_1)e^{3t} + (2C_2 - C_1)te^{3t}. \\ C_2e^{3t} \end{cases}$$

注:此题也可以取单位分向量 $k_3' = (0,1,0)$,有方程

$$(x_2)' = K_3'Ax = -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3x_2 - (x_1 - x_2) + 2x_3 = 3x_1 - C_1e^{3t} + 2C_2e^{3t},$$

同样,可得到解(3.3).

3 理论的推广

结论 1 如果常系数线性非齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

的特征方程 $|(A - \lambda E)| = 0$ 有 n 个互异的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 对应的线性无关的特征行向量分别为 $K_i = (k_{i1}, k_{i2}, \cdots, k_{in})$ $(i = 1,2,\cdots,n)$,则方程组(25)化为方程组

$$(K_ix)' = \lambda_i(K_ix) + K_if \quad (i = 1,2,\cdots,n), \quad (26)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中特征根 λ_i 对应特征行向量为 $K_i, i = 1,2,\cdots,n.$

结论 2　如果常系数线性非齐次方程组(25)的特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 有不同的特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$,其重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_m$,$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$,而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 对应的线性无关的特征行向量分别为 $K_i = (k_{i1},k_{i2},\cdots,k_{in})\ (i = 1,2,\cdots,m)$,则(25)化为方程组

$$\begin{cases}(K_i x_i)' = \lambda_i (K_i x_i) + (K_i f), & (K_i (A - \lambda_i E) = 0),\\ (K_{i-1} x_{i-1})' = \lambda_i (K_{i-1} x_{i-1}) + K_{i-1} x_i + K_{i-1} f,\\ (K_{i-1} (A - \lambda_i E)^m = 0),\end{cases} \tag{27}$$

其中特征根 λ_i 对应特征行向量为 $K_i, i = 1,2,\cdots,m.$

参 考 文 献

[1] 丁崇文. 常微分方程习题与解答 [M]. 2 版. 厦门: 厦门大学出版社,2005.
[2] 西南师范大学数学与财经学院. 常微分方程 [M]. 重庆: 西南师范大学出版社,2005.
[3] 王高雄,周之铭. 朱思铭等. 常微分方程 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社,2006.
[4] 窦霁虹. 常微分方程导教·导学·导考(第 2 版) [M]. 西安: 西北工业大学出版社,2007.
[5] 朱思铭. 常微分方程学习辅导与习题解答 [M]. 北京: 高等教育出版社,2009.
[6] 丁同仁. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社,2010.
[7] 韩茂安. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社,2011.
[8] 杜正东,徐冰,何志蓉. 常微分方程学习指导 [M]. 北京: 科学出版社,2011.
[9] 袁荣. 常微分方程 [M]. 北京: 高等教育出版社,2012.
[10] 蔡燧林. 常微分方程 [M]. 3 版. 杭州: 浙江大学出版社,2013.
[11] 郭玉翠. 常微分方程习题解答与学习指导 [M]. 北京: 清华大学出版社,2013.
[12] 李必文,赵临龙,张明波. 常微分方程 [M]. 武汉: 华中师范大学出版社,2014.
[13] 张伟年,杜正东,徐冰. 常微分方程 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社,2014.
[14] 张祥. 常微分方程 [M]. 北京: 科学出版社,2015.
[15] 赵临龙. 常系数线性方程组的一种新解法 [J]. 数学的实践与认识,2014,14: 302 - 308.

Solution Construction of the First Order Linear Differential Equations with Constant Coefficients

Zhao Linlong

(School of Mathematics and Statistics, Ankang University, Ankang Shaanxi 725000)

Abstract

In this paper, the solution of first order linear inhomogeneous differential equations is discussed, the concept of "line vector" is put forward, and the essential structure of the solution of the system of equations is given by using this concept.

Key words: constant coefficient linear differential equation system, algebraic linear equation, characteristic root.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net