DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.04.002

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第4期 Journal of Capital Normal University No. 4
2019年8月 (Natural Science Edition) Aug.,2019

图的2-强点可区别全色数的上界*

贾泽乐 王鸿杰 李沐春**

(兰州交通大学应用数学研究所,甘肃 兰州 730070)

摘要: 图的2-强点可区别全染色是满足2-距离以内的点可区别的正常全染色,其中色集合为点及其关联元素所染颜色构成的集合. 图的2-强点可区别全色数是满足2-强点可区别全染色所用的最小颜色数. 应用Lovász局部引理得到了图G的2-强点可区别全色数的上界. 确切地,对不含孤立边的简单图G都有$\chi_{2-svdt}(G) \leqslant 35d^2$,其中$d$为$G$的最大度.

关键词: Lovász局部引理; 2-强点可区别全染色; 上界

中图分类号: O157.5

1 引言及主要结论

本文主要考虑不含孤立边的简单连通图. 设$G=(V,E)$表示顶点集为V,边集为E的简单图. 用d和n分别表示图G的最大度与阶数. K_n表示n阶完全图,K_3-free图指不包含K_3的图.

图染色是图论研究主要方向之一. 19世纪初,伴随着四色问题深入研究[1],学者们相继提出了图的点染色、边染色以及全染色等概念并得到了许多有趣的结果. 1965年,Vizing和Behzad[2]针对图的全染色提出了著名的全染色猜想. 1997年,Burris[3]首次在其博士论文中提出了点可区别边染色的概念,进一步拓展了图的染色问题. 2004年,张忠辅等[4]在考虑信息传播过程中出现的干扰和共振现象时,提出了邻点可区别全染色的相关概念,并运用函数构造法和分析法得出了一些特殊图类的邻点可区别全色数. 2009年,晁福刚等[5]应用概率方法对图的邻点可区别全染色做了深入的研究,给出了邻点可区别全色数的一个较小的上界,即对于简单图G,有$\chi_{at}(G) \leqslant \Delta + C + 20\sqrt{\Delta \ln \Delta}$,其中$C \geqslant 10^{26}$. 2011年,张东翰和张忠辅[6]得到了图的邻点强可区别全色数的一个上界,即对于任意最大度$\geqslant 2$的简单图G,有$\chi_{ast}(G) \leqslant 32\Delta^2$. 同年,强会英和王洪申[7]用概率方法得到了图的邻点强可区别全色数的一个新的上界. 概率方法在确定图色数的上界方面有很大的优势,其特殊之处在于注重研究对象的某些特征的存在性,避开了对象本身的具体结构.

2017年,Wen等[8]经过对强染色的研究,引入了图的r-强点可区别全染色,并分别给出了K_3-free图的1-强点可区别全色数,树图的2-强点可区别全色数与3-强点可区别全色数的一个上界. 下面给出r-强点可区别全染色的概念:

定义1[8] 对于阶数不小于3的简单连通图G,设k为正整数,令映射$f: V(G) \cup E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$. 若$f$满足下面条件:

(1) 对$\forall uv, uw \in E(G)$,且$v \neq w$,有$f(uv) \neq f(uw)$;

(2) 对$\forall uv \in E(G)$,有$f(u) \neq f(v)$,$f(u) \neq f(uv)$,$f(v) \neq f(uv)$;

(3) 对$\forall u, v \in V(G)$,当$1 \leqslant d(u,v) \leqslant r$时,都有$C(u) \neq C(v)$.

则称f为图G的r-强点可区别全染色,其中$C(u) = \{f(u)\} \cup \{f(v)\} \cup \{f(uv) \mid uv \in E(G)\}$. 简记作图$G$的$k-r-$SVDTC,并称

$$\chi_{r-svdt}(G) = \min\{k \mid G \text{具有} k-r-\text{SVDTC}\}$$

为图G的距离为r-强点可区别全色数.

注1 根据定义1可知,任意图G可r-强点可区别全染色的必要条件是图G不含有孤立边且最大度$d \geqslant 2$.

收稿日期: 2018-10-22

* 国家自然科学基金(11461038,61163010);甘肃省教育厅基金(2017A-021);兰州交通大学青年基金(2016014,2017004,2017021)资助项目

** 通信作者: limuchunmath@163.com

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

特别地，当 $r=1$ 时，即为图的 1 - 强点可区别全染色(邻点强可区别全染色)；当 r 为图的直径时，即为图的点强可区别全染色；$r=2$ 时，成为图的 2 - 强点可区别全染色，所需最少颜色数称为 2 - 强点可区别全色数. 本文应用概率方法中的 Lovász 局部引理得到了图 G 的 2 - 强点可区别全色数的上界.

定理 1 对不含孤立边的简单图 G，则 $\chi_{2-svdt}(G) \leqslant 35d^2$.

2 定理 1 的证明

为了证明定理 1，首先给出 Lovász 局部引理，它将在后面的证明中起到重要作用.

引理 1(Lovász 局部引理)[9-10] 考虑(典型的坏的)事件的集合 $\varepsilon=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，对每一个 A_i 都存在 $D_i \subseteq \varepsilon$($D_i$ 可以为空)使得每个 A_i 与 $\varepsilon-(D_i \cup A_i)$ 互相独立. 若有实数 $x_1,x_2,\cdots x_n \in [0,1]$ 使得对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有 $P_r(A_i) \leqslant x_i \prod_{A_j \subseteq D_i}(1-x_j)$，则 ε 中所有事件都不发生的概率至少是 $\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) > 0$.

下面给出定理 1 的具体证明过程:

定理 1 证明: 设 $f: E(G) \cup V(G) \to \{1,2,\cdots,c\}$ 是图 G 的随机全染色，并且对任意边 $e \in E(G)$，$f(e)$ 是 $\{1,2,\cdots,c\}$ 随机均匀的边染色且对任意 u，$v \in V(G)$，$f(u)$，$f(v)$ 是 $\{1,2,\cdots,c\}$ 随机均匀的点染色，其中 $c=kd^2$(k 为正整数). 为了保证图 G 是 2 - 强点可区别全染色，需满足以下条件:

(1) 正常全染色——任意两条相邻边不能染同色; 任意两个相邻点不能染同色; 点和关联边不能染同色;

(2) 2 - 强点可区别——任意两个距离不超过 2 的点的色集合均不同.

第一步，定义如下坏事件

(1) 对每一对相邻的点 $u,v \in V(G)$，令 E_A 表示 u 和 v 染相同颜色的事件;

(2) 对每一对相邻的边 $e_1,e_2 \in E(G)$，令 E_B 表示 e_1 和 e_2 染同种颜色的事件;

(3) 对任意一条边 $e=uv \in E(G)$，令 E_C 表示 e 与关联点 u 或 v 染同色的事件;

(4) 对任意两点 $u,v \in V(G)$，其中 $1 \leqslant d(u,v) \leqslant 2$，令 E_D 表示点 u 与 v 的色集合满足 $C(u)=C(v)$ 的事件.

第二步，计算坏事件发生的概率

$$P_r(E_A)=P_r(E_B)=\frac{1}{c};$$

$$P_r(E_C)=\frac{c\times\binom{2}{1}\times c-c}{c^3}=\frac{2c-1}{c^2}<\frac{2}{c};$$

若事件 E_D 发生，指任意两点 u 和 v 在距离为 2 的条件下，满足色集合 $C(u)=C(v)$，而使得 $C(u)=C(v)$ 可能值的总数为:

$$\binom{c}{1}+\binom{c}{2}+\cdots+\binom{c}{2d+1}$$

因此，概率为

$$P_r(E_D)=\frac{1}{\binom{c}{1}+\binom{c}{2}+\cdots+\binom{c}{2d+1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\underbrace{\binom{c}{1}+\binom{c}{1}+\cdots\binom{c}{1}}_{2d+1}} \leqslant \frac{1}{c(2d+1)}<\frac{1}{2cd}$$

第三步，计算相关事件数

首先构造图 D，其结点为 4 种类型的所有事件，其中两个结点 E_X 和 E_Y 相关，当且仅当 X 和 Y 包含一个公共元素. 因为每个事件 E_X 的发生，仅依赖于 X 的元素，所以 D 是上述事件的相关图.

对上述坏事件的相关数进行简要分析，如下:

E_A: 事件 E_A 包含两个相邻点 u,v，与 u 相邻的点最多有 d 个，与 v 相邻的点最多有 $d-1$ 个. 则 E_A 与 E_A 的相关数至多为 $2d-1$; 事件 E_A 包含两个相邻点，事件 E_B 包含两条相邻边，故 E_A 与 E_B 的相关数为 0; 事件 E_A 包含两个点，与每个点关联的边数最多有 d 条，由于两个点之间有一条公共边，因此 E_A 与 E_C 的相关数至多为 $2d-1$; 事件 E_A 包含两个点，当事件 E_A 与事件 E_D 有一个公共点 u 时，在距离为 2 下，与点 u 色集合相同的点不超过 $d+d(d-1)=d^2$ 个，与点 u 的邻点色集合相同的点最多为 $\binom{d}{2}$ 个，则 E_A 与 E_D 的相关数至多为 $2d^2+2\binom{d}{2}=3d^2-d$，为计算方便，故取其相关数为 $3d^2$.

E_B: 事件 E_B 包含两条相邻边，事件 E_A 包含两个相邻点，则 E_B 与 E_A 的相关数为 0; 事件 E_B 包含两条边 e_1 和 e_2，和每条边相邻的边数最多为 $2(d-1)$，因此 E_B 与 E_B 的相关数至多为 $4d-4$; 事件 E_B 表示相邻边 e_1,e_2 染同色，而每条边最多关联两个顶点，因此 E_B 与 E_C 的相关数最多为 4; 事件 E_B 包含

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

两条相邻边 e_1 和 e_2，即事件 E_B 包含三个顶点，当 E_B 与 E_D 包含一个公共点 u 时，在距离为 2 下，与点 u 色集合相同的点最多有 $d + d(d-1) = d^2$ 个，与点 u 的邻点色集合相同的点不超过 $\binom{d}{2}$ 个，因此 E_B 与 E_D 的相关数至多为 $3d^2 + 3\binom{d}{2} = \frac{9}{2}d^2 - \frac{3}{2}d$，为计算方便，故取其相关数为 $\frac{9}{2}d^2$.

E_C: 事件 E_C 包含两个点 u，v，与 u 相邻的点不超过 d 个，与 v 相邻的点最多为 $d-1$ 个，因此 E_C 与 E_A 的相关数至多为 $2d-1$; 事件 E_C 包含两个点 u 和 v，与点 u 相邻的边最多有 d 条，与点 v 相邻的边不超过 $d-1$ 条，因此 E_C 与 E_B 的相关数至多为 $2d-1$; 事件 E_C 包含两个点 u，v，与点 u 相邻的边至多有 d 条，与点 v 相邻的边最多有 d 条，因此 E_C 与 E_C 的相关数至多为 $2d$; 事件 E_C 包含两个点 u 和 v，在距离为 2 下，与点 u 色集合相同的点最多为 $d + d(d-1) = d^2$ 个，与点 u 的邻点色集合相同的点不超过 $\binom{d}{2}$ 个，因此 E_C 与 E_D 的相关数至多为 $2d^2 + 2\binom{d}{2} = 3d^2 - d$. 为计算方便，故取其相关数为 $3d^2$.

E_D: 事件 E_D 包含两个点 u，v，与点 u 相邻的点最多有 d 个，因此 E_D 与 E_A 的相关数至多为 $2d$; 事件 E_D 包含两个点 u，v，当与事件 E_B 只有一个公共点 u 时，在距离为 2 下，与点 u 相邻的边最多有 d 条，与任意相邻边相邻的边数最多有 $2d-1$ 条，因此 E_D 与 E_B 的相关数至多为 $2d(2d-1)$; 事件 E_D 包含两个点 u，v，当与事件 E_C 只有一个公共点 u 时，与点 u 相邻的点最多有 d 个，与点 u 相邻的边最多有 d 条，因此 E_D 与 E_C 的相关数至多为 $4d$; 事件 E_D 包含两个点 u，v，在距离为 2 下，与点 u 色集合相同的点最多有 $d + d(d-1) = d^2$ 个，与点 u 的邻点色集合相同的点最多有 $\binom{d}{2}$ 个，与点 u 的邻点相邻且距离为 2 的点的色集合相同的点最多有 $d\binom{d-1}{2}$ 个，因此 E_D 与 E_D 的相关数至多为 $2\left(d^2 + \binom{d}{2} + d\binom{d-1}{2}\right) = d^3 + d$.

根据上面的相关数分析，得到了如下的关系关联矩阵.

$$\begin{pmatrix} 2d-1 & 0 & 2d-1 & 3d^2 \\ 0 & 4d-4 & 4 & \frac{9}{2}d^2 \\ 2d-1 & 2d-1 & 2d & 3d^2 \\ 2d & 2d(2d-1) & 4d & d^3+d \end{pmatrix}$$

第四步，构造常数证明不等式.

设 $\frac{2}{c}$，$\frac{2}{c}$，$\frac{4}{c}$，$\frac{1}{cd}$ 分别表示与 1，2，3，4 中的事件相关的常数.

应用 Lovász 局部引理证明坏事件不发生的概率为正，即说明 2 - 强点可区别全染色是存在的. 因此，只需证明以下四个不等式成立:

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{2}{c} \times \left(1 - \frac{2}{c}\right)^{2d-1} \times \left(1 - \frac{4}{c}\right)^{2d-1} \times \left(1 - \frac{1}{cd}\right)^{3d^2}. \tag{1}$$

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{2}{c} \times \left(1 - \frac{2}{c}\right)^{4d-4} \times \left(1 - \frac{4}{c}\right)^{4} \times \left(1 - \frac{1}{cd}\right)^{\frac{9}{2}d^2}. \tag{2}$$

$$\frac{2}{c} \leqslant \frac{4}{c} \times \left(1 - \frac{2}{c}\right)^{2d-1} \times \left(1 - \frac{2}{c}\right)^{2d-1} \times \left(1 - \frac{4}{c}\right)^{2d} \times \left(1 - \frac{1}{cd}\right)^{3d^2}. \tag{3}$$

$$\frac{1}{2cd} \leqslant \frac{1}{cd} \times \left(1 - \frac{2}{c}\right)^{2d} \times \left(1 - \frac{2}{c}\right)^{2d(2d-1)} \times \left(1 - \frac{4}{c}\right)^{4d} \times \left(1 - \frac{1}{cd}\right)^{d^3+d}. \tag{4}$$

根据不等式 $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \geqslant \frac{1}{4}$ 对 $x \geqslant 2$ 均成立，可以从上面的不等式中推出如下(5)—(8)式:

$$\frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4d-2}{c} + \frac{8d-4}{c} + \frac{3d^2}{cd}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24d-12}{c} + \frac{6d^2}{cd}} \Rightarrow \frac{30d-12}{c} \leqslant 1. \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{8d-8}{c} + \frac{16}{c} + \frac{9d^2}{2cd}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16d+16}{c} + \frac{9d}{c}} \Rightarrow \frac{25d+16}{c} \leqslant 1. \tag{6}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4d-2}{c} + \frac{4d-2}{c} + \frac{8d}{c} + \frac{3d^2}{cd}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{32d-8}{c} + \frac{6d^2}{cd}} \Rightarrow \frac{38d-8}{c} \leqslant 1. \tag{7}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4d}{c} + \frac{8d^2-4d}{c} + \frac{16d}{c} + \frac{d^3+d}{cd}} \Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{18d^2+32d+2}{c}} \Rightarrow$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\frac{18d^2+32d+2}{c}\leqslant 1. \tag{8}$$

从上面(5)至(8)式可以得到,只有当 c,d 满足一定条件时,不等式才成立. 我们注意到当 $d\geqslant 2$ 时,$18d^2+32d+2\geqslant\{30d-12,25d+16,38d-8\}$. 因此,(5)—(8)成立只需要(8)成立即可. 此时,令 $c=kd^2(k>0)$,由(8)可知,

$$\frac{18d^2+32d+2}{c}=\frac{18d^2+32d+2}{kd^2}\leqslant 1\Rightarrow$$

$$18+\frac{32}{d}+\frac{2}{d^2}\leqslant k.$$

因此,当 $d\geqslant 2,k\geqslant 35$ 时,不等式

$$\frac{18d^2+32d+2}{c}\leqslant 1$$

成立.

综上所述,当 $d=\Delta(G)\geqslant 2$ 时,对简单图 G,有 $\chi_{2-svdt}(G)\leqslant 35d^2$.

参 考 文 献

[1] DIRAC G A. A Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1952, 27(1): 85-92.

[2] BONDY J A, MARTY U S R. Graph theory with applications [M]. The Macmillan Press Ltd: New York, 1976: 91-131.

[3] BURRIS A C. Vertex-distinguishing proper edge-colorings [D]. Tennessee: Memphis State Univercity, 1993.

[4] 张忠辅,陈祥恩,李敬文,等. 关于图的邻点可区别全染色 [J]. 中国科学,2004, 39(18): 195-198.

[5] 晁福刚,张忠辅,强会英. 图的邻点可区别全色数的一个上界 [J]. 纯粹数学与应用数学,2010, 26(1): 92-95.

[6] 张东瀚,张忠辅. 图的邻点强可区别全色数的上界 [J]. 数学进展,2011, 40(2): 168-172.

[7] 强会英,王洪申. 图的邻点强可区别全色数的一个上界 [J]. 数学进展. 2011, 42(6): 801-805.

[8] WEN F, HUANG L, LI M, et al. R-strongly vertex-distinguishing total coloring of graphs [OL]. [2018.6.26], arXiv: 1806.10132.

[9] ALON N, SPENCER J H. The probabilistic method [M]. Wiley: New Jersey, 2008.

[10] MOLLOY Michael, REED Bruce. Graph coloring and the probabilistic method [M]. Springer: New York, 2002.

An Upper Bound on the 2-Strongly Vertex-distinguishing Total Chromatic Number of Graphs

JIA Zele WANG Hongjie LI Muchun

(Institute of Applied Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu 730070)

Abstract: A 2-strongly vertex-distinguishing total coloring of graphs is a proper total coloring such that no two vertices with distance no more than 2 have the same color set, where the color set of a vertex is a set consisted of the colors dyed on the vertex and its incident elements. A 2-strongly vertex-distinguishing total chromatic number is the minimum number required for a 2-strongly vertex-distinguishing total coloring of graphs. In this paper, by applying Lovász local lemma we obtain that, for any graph without isolated edges, the upper bound of 2-strongly vertex-distinguishing total chromatic number is at most $35d^2$.

Keywords: Lovász local lemma; 2-strongly vertex-distinguishing total chromatic number; upper bound

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net