DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.03.003

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第3期 Journal of Capital Normal University No. 3
2019年6月 (Natural Science Edition) Jun. ,2019

两个猜想不等式的证明与推广*

石冶郝[1] 林 玲[1] 孙 颖[2]

(1. 首都师范大学初等教育学院,北京 100048; 2. 湖南省邵阳市大祥区祥凤实验学校,湖南 邵阳 422000)

摘要: 本文用琴生不等式推广了一类分式不等式,在特殊情形下证明了两个猜想.

关键词: 分式不等式; 琴生不等式; 猜想

中图分类号: O178

0 引 言

李阳刚[1]从一道奥林匹克问题入手,利用柯西不等式及均值不等式得到一类不等式的统一证法,并提出两个类似不等式的猜想. 为下文需要,先给出参考文献[1]的两个定理和两个猜想.

定理A 设$a,b>1$,$-1\leqslant\lambda\leqslant 1$,则

$$\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}\geqslant\frac{2}{ab+\lambda}. \tag{1}$$

定理B 若$a_1,a_2,\cdots,a_n>1$,$n\in\mathbf{N}_+$,$n\geqslant 2$,$0<\lambda\leqslant 1$,则

$$\frac{1}{a_1^n-\lambda}+\frac{1}{a_2^n-\lambda}+\cdots+\frac{1}{a_n^n-\lambda}\geqslant\frac{n}{a_1a_2\cdots a_n-\lambda}. \tag{2}$$

猜想1 若$a,b,c>1$,$0<\lambda\leqslant 1$,则

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}+\frac{1}{c^3+\lambda}\geqslant\frac{3}{abc+\lambda}. \tag{3}$$

猜想2 若$a_1,a_2,\cdots,a_n>1$,$n\in\mathbf{N}_+$,$n\geqslant 2$,$0<\lambda\leqslant 1$,则

$$\frac{1}{a_1^n+\lambda}+\frac{1}{a_2^n+\lambda}+\cdots+\frac{1}{a_n^n+\lambda}\geqslant\frac{n}{a_1a_2\cdots a_n+\lambda}. \tag{4}$$

本文利用函数的凹凸性,借助琴生不等式,给出了不等式(1)和(2)的更一般的形式,在特殊情形下,上述两个猜想得到了证明.

1 主要结论

定理1 若$a_1,a_2,\cdots,a_n>1$,$n\in\mathbf{N}_+$,$-1\leqslant\lambda\leqslant 1$,则当$\mu\geqslant 1$时,

$$\frac{1}{(a_1^n+\lambda)^\mu}+\frac{1}{(a_2^n+\lambda)^\mu}+\cdots+\frac{1}{(a_n^n+\lambda)^\mu}\geqslant\frac{n}{(a_1a_2\cdots a_n+\lambda)^\mu}, \tag{5}$$

等号成立当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理2 若$0<a_1,a_2,\cdots,a_n\leqslant 1$,$n\in\mathbf{N}_+$,$\lambda\geqslant 1$,则当$0<\mu\leqslant 1$时,

$$\frac{1}{(a_1^n+\lambda)^\mu}+\frac{1}{(a_2^n+\lambda)^\mu}+\cdots+\frac{1}{(a_n^n+\lambda)^\mu}\leqslant\frac{n}{(a_1a_2\cdots a_n+\lambda)^\mu}. \tag{6}$$

等号成立当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理1和定理2证明方法相似,下面仅给出定理1的证明.

构造辅助函数$f(x)=\frac{1}{(e^x+\lambda)^\mu}$($x>0$),

计算一阶导数$f'(x)=\frac{-\mu e^x}{(e^x+\lambda)^{\mu+1}}$,二阶导数$f''(x)=\frac{\mu e^x(\mu e^x-\lambda)}{(e^x+\lambda)^{\mu+2}}$,

当$\mu\geqslant 1$时,且$-1\leqslant\lambda\leqslant 1$,$x>0$,则$f''(x)>0$.

所以函数$f(x)=\frac{1}{(e^x+\lambda)^\mu}$在$x\in(0,+\infty)$上是凸函数.

利用Jensen不等式,得$f(\ln x_1)+f(\ln x_2)+\cdots+f(\ln x_n)\geqslant nf\left(\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}\right)$,

取$x_j=a_j^n$,满足$\ln x_j>0$,$j=1,2,\cdots,n$,

即有$\frac{1}{(a_1^n+\lambda)^\mu}+\frac{1}{(a_2^n+\lambda)^\mu}+\cdots+\frac{1}{(a_n^n+\lambda)^\mu}\geqslant$

收稿日期: 2018-06-21

* 国家自然科学基金项目(11601352)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\dfrac{n}{(a_1a_2\cdots a_n+\lambda)^{\mu}}$.

注 1　当 $\mu=1$ 时,由定理 1 的特殊情形容易发现参考文献[1]的猜想 2 是成立的,显然猜想 2 是猜想 1 的高维情形,因而猜想 1 自然成立. 但是定理 1 拓广了两个不等式(3)和(4)中参数 λ 的研究范围.

注 2　下面给出不等式(3)的一种加细.

例如,设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\lambda}$ $(x>0)$,则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}+\frac{1}{c^3+\lambda}\\&=f(\ln a^3)+f(\ln b^3)+f(\ln c^3)\\&=\frac{f(\ln a^3)+f(\ln b^3)}{2}+\frac{f(\ln b^3)+f(\ln c^3)}{2}+\\&\quad\frac{f(\ln c^3)+f(\ln a^3)}{2}\\&\geqslant f\left(\frac{\ln a^3+\ln b^3}{2}\right)+f\left(\frac{\ln b^3+\ln c^3}{2}\right)+f\left(\frac{\ln c^3+\ln a^3}{2}\right)\\&\geqslant 3f\left(\frac{\ln a^3+\ln b^3+\ln c^3}{3}\right)=\frac{3}{abc+\lambda},\end{aligned}$$

故有

$$\frac{1}{a^3+\lambda}+\frac{1}{b^3+\lambda}+\frac{1}{c^3+\lambda}\geqslant\frac{1}{\sqrt{a^3b^3}+\lambda}+\frac{1}{\sqrt{b^3c^3}+\lambda}+\frac{1}{\sqrt{c^3a^3}+\lambda}\geqslant\frac{3}{abc+\lambda}.$$

高维情形类似可得加细不等式.

注 3　当 $\mu\geqslant 1$ 时,如果事先用数学归纳法证明了猜想 2,但是数学归纳法证明过程非常繁琐,则可根据不等式(2)、(4)和幂平均不等式有

$$\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n+\lambda}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^n+\lambda}\leqslant\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(a_k^n+\lambda)^{\mu}}\right]^{\frac{1}{\mu}},$$

因此 $\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n+\lambda}\leqslant\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(a_k^n+\lambda)^{\mu}}\right]^{\frac{1}{\mu}}$,

整理即得定理 1. 利用 Jensen 加权不等式,可以对定理 1 和定理 2 作加权推广.

定理 3　若 $a_k>1$,$\omega_k\in(0,1)$,$k=1,2,\cdots,n$,$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$,$n\in\mathbf{N}_+$,$-1\leqslant\lambda\leqslant 1$,

当 $\mu\geqslant 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{(a_k^n+\lambda)^{\mu}}\geqslant\frac{1}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n}a_k^{\omega_k}\right)^n+\lambda]^{\mu}},\quad(7)$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

定理 4　若 $a_k\in(0,1]$,$\omega_k\in(0,1)$,$k=1,2,\cdots,n$,$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$,$n\in\mathbf{N}_+$,　$\lambda\geqslant 1$,

则当 $0<\mu\leqslant 1$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{(a_k^n+\lambda)^{\mu}}\leqslant\frac{1}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n}a_k^{\omega_k}\right)^n+\lambda]^{\mu}},\quad(8)$$

等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

下面给出定理 3 的证明.

由定理 1 知函数 $f(x)=\dfrac{1}{(e^x+\lambda)^{\mu}}$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上是凸函数.

利用 Jensen 加权不等式,

得 $\omega_1f(\ln x_1)+\omega_2f(\ln x_2)+\cdots+\omega_nf(\ln x_n)\geqslant f(\omega_1\ln x_1+\omega_2\ln x_2+\cdots+\omega_n\ln x_n)$,

取 $x_j=a_j^n$,满足 $\ln x_j>0$,$j=1,2,\cdots,n$,

即有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\omega_k}{(a_k^n+\lambda)^{\mu}}\geqslant\dfrac{1}{\left[\prod\limits_{k=1}^{n}a_k^{\omega_k}\right)^n+\lambda]^{\mu}}$.

同理可证定理 4.

再次考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{(e^x+\lambda)^{\mu}}$ $(\lambda>0)$,二阶导数 $f''(x)=\dfrac{\mu e^x(\mu e^x-\lambda)}{(e^x+\lambda)^{\mu+2}}$,

当 $\mu\in(-\infty,0)$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{(e^x+\lambda)^{\mu}}$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上是凸函数.

当 $\mu\in(0,+\infty)$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{(e^x+\lambda)^{\mu}}$ 在 $x\in\left[\ln\dfrac{\lambda}{\mu},+\infty\right)$ 上是凸函数,在 $x\in\left(-\infty,\ln\dfrac{\lambda}{\mu}\right]$ 上是凹函数. 在定理 3 和定理 4 中分别令 $x_k=a_k^n$,$k=1,2,\cdots,n$,于是得到更一般形式的加权不等式.

定理 5　若 $\lambda>0$,$n\in\mathbf{N}_+$,$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$,$\omega_k\in(0,1)$,$k=1,2,\cdots,n$,

(1)当 $\mu\in(-\infty,0)$ 时,$x_k\in(0,+\infty)$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{(x_k+\lambda)^{\mu}}\geqslant\frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k^{\omega_k}+\lambda\right)^{\mu}};\quad(9)$$

(2)当 $\mu\in(0,+\infty)$ 时,$x_k\in\left[\dfrac{\lambda}{\mu},+\infty\right)$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{(x_k+\lambda)^{\mu}}\geqslant\frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k^{\omega_k}+\lambda\right)^{\mu}};\quad(10)$$

(3)当 $\mu\in(0,+\infty)$ 时,$x_k\in\left(0,\dfrac{\lambda}{\mu}\right]$,则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega_k}{(x_k+\lambda)^{\mu}}\leqslant\frac{1}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}x_k^{\omega_k}+\lambda\right)^{\mu}};\quad(11)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. 证明过程从略.

注 4 在不等式(10)和(11)中令权重 $\omega_k = \frac{1}{n}$, $x_k = a_k^n$, $k = 1,2,\cdots,n$, 则(10)退化为:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a_k^n + \lambda)^{\mu}} \geqslant \frac{n}{(\prod_{k=1}^{n} a_k + \lambda)^{\mu}}, \quad (12)$$

(11)退化为:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a_k^n + \lambda)^{\mu}} \leqslant \frac{n}{(\prod_{k=1}^{n} a_k + \lambda)^{\mu}}, \quad (13)$$

不等式(5)与(12),(6)与(13)比较,结构相同,但是不等式中的变量约束条件和参数范围不一致. 本文对 $\lambda < 0$ 的情形不再讨论.

2 应 用

回顾定理 1 和定理 2,当 $\lambda = 1$ 且 $\mu = 1$ 时,即成为 Henrici's 不等式[2]:

若 $a_k \geqslant 1(k = 1,2,\cdots,n)$, 则 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} \geqslant \frac{n}{1 + (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}}$;

若 $0 < a_k \leqslant 1(k = 1,2,\cdots,n)$, 则 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + a_k} \leqslant \frac{n}{1 + (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}}$;

等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

同时,本文所证定理的一些特殊情形也频繁的出现在数学竞赛关于不等式证明的试题中,利用定理 1(当 $\lambda = 1$ 且 $\mu = 1$ 时)和定理 4,分别得到下面 3 个例题.

例 1 (第 39 届 IMO 预选试题) 令实数 $r_1, r_2, \cdots, r_n \geqslant 1$, 试证

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \frac{1}{r_2 + 1} + \cdots + \frac{1}{r_n + 1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n} + 1}.$$

说明: 本题也可以用数学归纳法证明.

例 2[3] 设 $a_i \in \mathbf{R}^+, 0 \leqslant x_i \leqslant 1 (i = 1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$. 求证: $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 + x_i} \leqslant \frac{1}{1 + x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}}$.

教师若熟悉不等式(6)的高等数学背景,在定理 2 中令指数 $\mu = \frac{1}{2}, \lambda = 1, n = 3$, 则可编制下面试题.

例 3 设 $0 < a_1 \leqslant 1, 0 < a_2 \leqslant 1, 0 < a_3 \leqslant 1$, 求证: $\frac{1}{\sqrt{1 + a_1^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + a_2^3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + a_3^3}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{1 + a_1 a_2 a_3}}$.

不等式是数学的重要组成部分,它遍及数学的每一个分支学科,在竞赛数学中占有不可忽视的一席之地. 命题者可以根据本文的结论编制不同的数学问题,为不同层次的学生提供方法.

3 思 考

若定理 1 中参数 λ 为负数,我们可以用级数方法重新证明不等式(5). 根据二项式函数 $(1 + x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式[4],

$$(1 + x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!} x^n + \cdots$$

当 $\alpha \leqslant -1$ 时, 收敛域为 $(-1,1)$.

因此,当 $\mu \geqslant 1$ 时,

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{a_j^n}\right)^{\mu}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu)(-\mu - 1)\cdots(-\mu - k + 1)}{k!} \frac{\lambda^k}{a_j^{nk}},$$

$$\frac{\lambda}{a_j^n} \in (-1,0), j = 1,2,\cdots,n,$$

于是

$$\frac{1}{(a_1^n + \lambda)^{\mu}} + \frac{1}{(a_2^n + \lambda)^{\mu}} + \cdots + \frac{1}{(a_n^n + \lambda)^{\mu}}$$

$$= \frac{1}{a_1^{\mu n}\left(1 + \frac{\lambda}{a_1^n}\right)^{\mu}} + \frac{1}{a_2^{\mu n}\left(1 + \frac{\lambda}{a_2^n}\right)^{\mu}} + \cdots + \frac{1}{a_n^{\mu n}\left(1 + \frac{\lambda}{a_n^n}\right)^{\mu}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^{\mu n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu)(-\mu - 1)\cdots(-\mu - k + 1)}{k!} \frac{\lambda^k}{a_j^{nk}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu + 1)\cdots(\mu + k - 1)}{k!} (-\lambda)^k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j^{(k+\mu)n}}$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu + 1)\cdots(\mu + k - 1)}{k!} \frac{n(-\lambda)^k}{(a_1 a_2 \cdots a_n)^{(k+\mu)}}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= \frac{n}{(a_1a_2\cdots a_n)^{\mu}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu)(-\mu-1)\cdots(-\mu-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{(a_1a_2\cdots a_n)^k}$$

$$= \frac{n}{(a_1a_2\cdots a_n)^{\mu}(1+\frac{\lambda}{a_1a_2\cdots a_n})^{\mu}} = \frac{n}{(a_1a_2\cdots a_n+\lambda)^{\mu}},$$

其中用到正数的算术—几何平均不等式，等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. 又 $\frac{\lambda}{a_j^n} \in (-1,0)$，$j = 1,2,\cdots,n$，显然有 $\frac{\lambda}{a_1a_2\cdots a_n} \in (-1,0)$，再利用函数 $(1+\frac{\lambda}{a_1a_2\cdots a_n})^{-\mu}$ 的幂级数展开式，最后倒数第二个等式成立. 从而定理 1 在 $a_j > 0$，$\frac{\lambda}{a_j^n} \in (-1,0)$，$j = 1,2,\cdots,n$，$\mu \geqslant 1$ 时也是成立的. 与定理 1 中条件对照，$a_1,a_2,\cdots,a_n > 1$，$-1 \leqslant \lambda < 0$，$\mu \geqslant 1$，说明用级数方法证明不等式(5) 中变量的约束条件可以减弱，但仅限于参数 λ 为负数的情形. 当参数 λ 为正数时，不等式(5) 中变量的约束条件能否减弱？本文的其它定理约束条件能否减弱，希望同行指导.

参 考 文 献

[1] 李阳刚. 关于一类分式型不等式的证明[J]. 黔南民族师范学院学报，2013，33(4)：127－128.

[2] BRENNER J L，ALZER H. A note on Henrici´s inequalities[M]. Basel：Birkhäuser Basel，1992：437－440.

[3] 叶军. 数学奥林匹克教程[M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2003：309.

[4] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册)[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2001：56.

Proofs and Extensions for Two Inequality Conjectures

SHI Yehao[1] LIN Ling[1] SUN Ying[2]

(1. Elementary Educational College，Capital Normal University，Beijing 100048；
2. Xiang Feng experimental school，Daxiang District，Shaoyang Hunan 422900)

Abstract: In this paper，a series of generalizations about a class of fractional inequality are given using Jessen inequality. This paper also proves two conjectures in a special case.

Keywords: fractional inequality; Jessen inequality; conjecture

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net