DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.01.014

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第1期 Journal of Capital Normal University No.1
2019年2月 (Natural Science Edition) Feb.,2019

偏导数易错题分析研究*

景慧丽 王惠珍

(火箭军工程大学基础部,陕西 西安 710025)

摘 要

偏导数的计算是多元函数微分学中的一个重点,尽管偏导数的实质是一元函数求导,但是大部分学员在求偏导数时还是经常出错.文章分析总结了学员在求偏导数过程中经常出现的错误,就每种错误给出了相应的例题,对错解进行了分析,最后给出了正确解法、注意事项及常用的解题技巧.

关键词: 偏导数; 导数; 易错题; 分析

中图分类号: O172

0 引 言

偏导数是多元函数微分学中最基本的概念之一,能正确、熟练地计算偏导数是学习多元函数微分学最基本的要求之一.由于偏导数的实质是一元函数求导,一元函数求导法则和求导公式可以直接用来求偏导数,所以教材和大部分辅导书上关于偏导数的求法、求解技巧讲的不是很多.但是,笔者在教学过程中发现,大部分学员在计算偏导数时经常出错,要么偏导符号乱用,要么真把"常数"(即关于某个变量求偏导数时,将这个变量视为真正的变量,将其它变量视为"常数".[1])视为"常数"忽略掉了,要么把偏导函数误认为是一元函数等一系列错误.为了帮助学员掌握偏导数的求法,并能正确、熟练、简单地求解偏导数,笔者结合教学实践就学员在解题过程中经常出现的错误进行了分析,归纳了学员解题过程中所出现的错误类型,分析了出错的原因,并给出了正确解法[2].

1 求函数在一点的偏导数时常犯的错误

例1 设$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3-y}$,求$f_x(0,0)$.

[错解1] 因为关于x求偏导数时,y为常数,所以$f_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2=1$,故$f_x(0,0)=1$.

[错解2] 因为$f_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^3-y)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-y)^2}}$,且函数$f_x(x,y)$在点$(0,0)$处无定义,因此$f_x(0,0)$不存在.

[错解分析] 错解1错在"$f_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2$"这一步,因为$f_x(x,y)=\frac{1}{3}(x^3-y)^{-\frac{2}{3}}\cdot 3x^2$.尽管关于$x$求偏导数时,要把$y$视为"常数",但是这个"常数"是千万不能忽略掉的,错解1把y忽略掉了,因此是错误的.

错解2错在"函数$f_x(x,y)$在点$(0,0)$处无定义,因此$f_x(0,0)$不存在"这一步.因为不能由偏导函数$f_x(x,y)$在点(x_0,y_0)处无定义得到偏导数$f_x(x_0,y_0)$不存在的结论,此时$f_x(x_0,y_0)$是否存在,需要应用偏导数的定义来判断,因此是错误的.

注1 偏导数的实质是一元函数求导,所以如果要求函数在一点的偏导数时,通常有下列三种方法:

方法1是先求导,再代值.即先利用一元函数的求导公式、求导法则求出偏导函数,然后再把该点的值代入即可.需要注意的是,利用此方法时,偏导函数必须在该点有意义,如果偏导函数在该点无意义,是不能断定函数在该点的偏导数不存在的,此

投稿日期: 2017-4-20

* 火箭军工程大学2016年度教育教学立项课题(EPGC2016007)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

时需要应用偏导数的定义来判断、计算.

方法 2 是先代值,再求导. 即如果求 $f_x(x_0,y_0)$,先把 $y=y_0$ 代入到函数表达式 $f(x,y)$ 中,得到关于 x 的一元函数 $f(x,y_0)$,然后利用一元函数求导公式、求导法则求出导函数 $\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}$,再把 $x=x_0$ 代入导函数 $\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}$ 中,即可得 $f_x(x_0,y_0)$. 类似地,如果要求 $f_y(x_0,y_0)$,先把 $x=x_0$ 代入到 $f(x,y)$ 中,得到关于 y 的一元函数 $f(x_0,y)$,然后求出导函数 $\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}$,再把 $y=y_0$ 代入导函数 $\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}$ 中即可. 用这种方法求比较复杂的显函数在一点的偏导数往往可以起到事半功倍的作用. 例如[3],设 $f(x,y,z)=(z-a^{xy})\sin\ln x^2$,求 $f_x(1,0,2)$. 先把 $y=0,z=2$ 代入函数表达式中得 $f(x,0,2)=\sin\ln x^2$,因此 $f_x(1,0,2)=\frac{\mathrm{d}f(x,0,2)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1}=\frac{2}{x}\cos\ln x^2\Big|_{x=1}=2$. 显然该题目把用这种先代值再求导的方法求偏导数的简单之美体现的淋漓尽致. 本题如果先求出偏导函数再代值的话则比较麻烦,具体求解过程不再赘述. 需要注意的是,利用先代值再求导的方法时必须明确先代的是谁的值,否则容易出错.

方法 3 是利用偏导数的定义来求. 一般地,分段函数在分界点处的偏导数及高阶偏导数都需要用定义来求.

注 2　当使用一元函数求导法则、公式求出的偏导函数在所给点无意义而恰好又要求所给点处的偏导数时[4],应使用偏导数的定义或先代值再求导的方法计算.

[正确解法]　本题用两种方法求解.

解法 1: 利用偏导数的定义,即 $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}=1.$

解法 2: 先代值再求导,即因为 $f(x,0)=\sqrt[3]{x^3}=x$,所以 $f_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=1.$

2　求分段函数在分段点处的偏导数时常犯的错误

例 2　设函数 $f(x,y)=\begin{cases}x^2\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,求 $f_x(0,0)$.

[错解 1]　因为 $f_x(x,y)=\frac{2x(x^4+2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$,显然函数 $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处无定义,因此 $f_x(0,0)$ 不存在.

[错解 2]　因为 $f(x,0)=x^2\cdot\frac{x^2-0^2}{x^2+0^2}=x^2$,所以 $f_x(0,0)=\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=2x\big|_{x=0}=0.$

[错解分析]　错解 1 错在“函数 $f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处无定义,因此 $f_x(0,0)$ 不存在”这一步. 原因与例题 1 错解 2 的原因一样,这里不再赘述.

错解 2 的求解结果是正确的,但是求解步骤是错误的,因为 $f(x,0)=x^2$ 是从函数表达式 $f(x,y)=x^2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 中令 $y=0$ 得到的,但是 $f(x,y)=x^2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 成立的前提条件是 $x\neq0$ 并且 $y\neq0$,即 x 和 y 不能同时为零,所以导数 $\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}=2x$ 只能在 $x\neq0$ 的前提下才能成立,因此是不能在表达式 $\frac{\mathrm{d}f(x,0)}{\mathrm{d}x}=2x$ 中令 $x=0$ 来求 $f_x(0,0)$ 的,故上述解法是错误的.

[正确解法]　本题只能用偏导数的定义来求解,即

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\Delta x=0.$$

注 3　分段函数在分段点处的偏导数只能用偏导数的定义来求,即便偏导函数 $f_x(x,y)$ 在分段点 (x_0,y_0) 处有意义,偏导数也必须用定义来求.

3　求抽象复合函数的偏导数时常犯的错误

例 3　设函数 $v=\varphi(x,y)$ 在点 (x,y) 处具有偏导数,$z=f(x,v)$ 在点 (x,v) 处具有连续偏导数,求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

[错解]　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

[错解分析]　上述解法错在偏导数符号的应用上,等式 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$ 左端中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 与等式右端的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 含义是不同的,左端中的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是把 $z=f(x,\varphi(x,y))$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

中的 y 看成常数,关于 x 求导;右端中的$\frac{\partial z}{\partial x}$是把 $z=f(x,v)$ 中的 v 看成常数,关于 x 求导,因此在一个式子中是不能用同一个符号来表示不同意义的偏导数的,这样容易混淆,因此上述解法是错误的.

[正确解法] $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot\varphi'_1$.

注 4 尽管函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数的五种记号$\frac{\partial z}{\partial x}$,$\frac{\partial f}{\partial x}$,$z_x$,$f_x(x,y)$,$f'_1(x,y)$ 是一样的,但是对抽象复合函数求偏导数尤其是求高阶偏导数最好用 $f'_1(x,y)$、$f'_2(x,y)$ 这种形式的记号,因为这种记号简洁也不容易混淆,且这种符号的简洁美在抽象复合函数的高阶偏导数中更能体现出来.

例 4[5] 设函数 $z=f(x+y,xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

[错解] 令 $u=x+y$、$v=xy$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y=f'_1+yf'_2$,

所以 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial f'_1}{\partial y}+f'_2+y\frac{\partial f'_2}{\partial y}=f''_{12}+f'_2+yxf''_{22}$.

[错解分析] 上述解法关于一阶偏导数的求法是正确的,但是二阶偏导数的计算是错误的,因为在求$\frac{\partial f'_1}{\partial y}$和$\frac{\partial f'_2}{\partial y}$时,把 f'_1 和 f'_2 的复合结构弄错了.函数 f'_1 和 f'_2 的复合结构与函数 $f(x+y,xy)$ 的复合结构是完全一样的,它们仍然都是以 u、v 为中间变量,x、y 为自变量的复合函数,上述解法没有考虑函数 f'_1 及 f'_2 的复合结构,因此是错误的.

[正确解法] 只需把二阶偏导数的计算步骤改成下面的即可:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial f'_1}{\partial y}+f'_2+y\frac{\partial f'_2}{\partial y}\\&=f''_{11}+f''_{12}\cdot x+f'_2+y(f''_{21}+f''_{22}\cdot x)\\&=f''_{11}+xf''_{12}+f'_2+yf''_{21}+xyf''_{22}.\end{aligned}$$

又因为 f 具有二阶连续偏导数,所以 $f''_{12}=f''_{21}$,因此

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{11}+(x+y)f''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$.

注 5 抽象复合函数的高阶偏导数的计算是多元函数微分学中的重点和难点,在计算过程中只要明白并识记函数及其偏导数、高阶偏导数的复合结构是一样的,那么就不会出错了.另外,在求抽象复合函数的高阶偏导数时,题目中往往给出二阶偏导数连续这个条件,也就意味着二阶混合偏导数是相等的,因此往往需要把混合偏导数合并,例 4 就是这种情况.

4 求隐函数的偏导数时常犯的错误

例 5 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-ay,x+bz)=0$ 所确定,求$\frac{\partial z}{\partial x}$.

[错解] $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{F'_1+F'_2}{bF'_2}$.

[错解分析] 上述解法结果正确,步骤错误,即错在“$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$”这一步.因为如果隐函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的,则$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$.只有函数 $F(x,y,z)$ 是三元函数时才能直接应用公式$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$来求偏导数.题目中的函数 $F(x-ay,x+bz)$ 不是三元函数,它是由二元函数 $F(u,v)$,$u=x-ay$,$v=x+bz$ 复合而成的,所以是不能直接应用公式的,因此上述解法是错误的.

注 6 一般地,隐函数的偏导数的求法有三种,这里以方程 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$ 为例进行说明,其它情况类似.

方法 1 是直接利用公式,即$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$和$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$.使用公式时需要注意一下三点:①必须将所给方程化为 $F(x,y,z)=0$ 的形式,得到三元函数 $F(x,y,z)$;②求 F_x、F_y、F_z 时,变量 x、y、z 是独立的,它们之间是相互无关的,谁都不是谁的函数.即在求 F_x 时,要视 y、z 为“常数”;求 F_y 时,要视 x、z 为“常数”;求 F_z 时,要视 x、y 为“常数”;③代入公式时不要漏掉负号,分子分母不要漏掉.[6]

方法 2 是利用复合函数求导法则对方程 $F(x,y,z)=0$ 两边直接关于变量 x 或 y 求偏导.注意使用该方法时,变量 x、y、z 之间是有关系的,而不是彼此独立的.即如果求$\frac{\partial z}{\partial x}$或$\frac{\partial z}{\partial y}$,则 z 是 x、y 的函数,需要

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

利用复合函数求导法则来求,但是此时 x 与 y 是相互独立的,它们之间是没有任何关系的,即谁都不是谁的函数; 类似地,如果求$\frac{\partial x}{\partial y}$或$\frac{\partial x}{\partial z}$,则 x 是 y、z 的函数,y 与 z 是相互独立的,它们之间是没有任何关系的; 如果求$\frac{\partial y}{\partial x}$或$\frac{\partial y}{\partial z}$,则 y 是 x、z 的函数,x 与 z 是相互独立的,它们之间是没有任何关系的.

方法 3 是利用一阶全微分形式的不变性[7]. 注意使用一阶全微分形式的不变性时,变量 x、y、z 是独立的,它们之间是没有任何关系的,谁都不是谁的函数,它们都是自变量.

为了说明三种方法的区别,下面分别用三种方法求解例 5.

[正确解法] 解法 1: 公式法,即令 $G(x,y,z)=F(x-ay,x+bz)$,则$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}$. 又因为 $G_x=F'_1+F'_2$,$G_z=F'_2\cdot b=bF'_2$,因此$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+F'_2}{bF'_2}$.

解法 2: 利用复合函数求导法则直接求偏导,即等式 $F(x-ay,x+bz)=0$ 两边同时关于 x 求偏导得: $F'_1+F'_2\cdot\left(1+b\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$,解之得$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+F'_2}{bF'_2}$.

解法 3: 利用一阶全微分形式的不变性,即等式 $F(x-ay,x+bz)=0$ 两边同时取微分得:

$$\mathrm{d}F(x-ay,x+bz)=F'_1\mathrm{d}x-aF'_1\mathrm{d}y+F'_2\mathrm{d}x+bF'_2\mathrm{d}z=0$$

所以 $\mathrm{d}z=-\frac{(F'_1+F'_2)\,\mathrm{d}x}{bF'_2}+\frac{aF'_1\mathrm{d}y}{bF'_2}$. 又因为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$,因此,$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_1+F'_2}{bF'_2}$.

5 结束语

以上就是学员们在求偏导数时经常出现的错误,其实只要学员真正理解了偏导数的概念及其实质,掌握了求偏导数的每种方法的使用范围和技巧,上述错误是完全可以避免的. 当然,教员也应允许学员在学习过程中出现学习错误,学员对概念理解有偏差、解题过程出现错误都是符合学员的认知规律的. 另外,教员也要正确看待这些“错题”资源,这些资源都是非常宝贵的教学资源,正如心理学家盖耶所说 “谁不考虑尝试错误,不允许学生犯错误,就将错过最富成效的学习时刻.”[8] 所以,在教学中,教员可以故意“出错”,也要主动挖掘学员“错题”中的“闪光点”,及时进行探究、分析和讲评,这不但可以为学员创造新的学习机会,而且还可以培养学员的问题意识[9],培养和提高学员发现问题的能力.

参 考 文 献

[1] 陈汝栋.数学分析中的问题、方法与实践[M].北京: 国防工业出版社,2012: 171.
[2] 景慧丽.函数的导数易错题分析研究[J].高教学刊,2016,10: 260-262.
[3] 王树勋,曹吉利.高等数学(下)[M].西安: 西北工业大学出版社,2012: 58.
[4] 张天德,蒋晓芸.БП 吉米多维奇高等数学习题精选精解[M].济南: 山东科学技术出版社,2016: 243.
[5] 马知恩,王绵森.高等数学疑难问题选讲[M].北京: 高等教育出版社,2014: 193.
[6] 马菊侠,吴云天.高等数学题型归类·方法点拨·考研辅导[M]. 北京: 国防工业出版社,2010: 265.
[7] 同济大学应用数学系.高等数学(下)[M].北京: 高等教育出版社,2014: 83-84.
[8] 钱怡杰.基于错题的高三基础会计教学探究[J].经营管理者,2015,2: 372-373.
[9] 景慧丽.第二类曲面积分易错题分析研究[J].商丘职业技术学院学报,2015,5: 4-8.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Analysis on Easily Wrong Topic of Solving Partial Derivate Problems

JING Huili WANG Huizhen

(School of Science, Rocket Force University of Engineering, Xi'an Shaanxi 710025)

Abstract

Calculating the partial derivative is one of the most important concepts of the multivariable differential calculus. Although the partial derivative is essentially a derivative of a function, most of the students often make mistakes when calculating the partial derivative. The errors in the process of problem solving are concluded. Furthermore, some corresponding examples are given for each type of error, the wrong and correct solutions are analyzed, some matters needing attention and skills are discussed.

Keywords: partial derivative; derivative; easily wrong topic; analysis

(上接第 19 页)

Study on Near-infrared Optical Properties of Quantum Dots $CuInS_2$ Crystal

LIU Hui[1,2] YU Rong[1] JING Xiaoli[1] HUANG Wei[2] FENG Bo[2]

(1.College of Medical Science and Technology, Chengdu University of Traditional Chinese Medical, Chengdu Sichuan 610000;
2.College of Materials Science and Engineering, Sichuan University, Chengdu Sichuan 610064)

Abstract

The optical properties of quantum dot $CuInS_2$ crystals were predicted by density functional theory. The ideal gap width of $CuInS_2$ crystal was 1.08 eV, which belonged to direct gap semiconductor. At the same time, the dielectric constant, the refractive index, the absorption coefficient and the spectrum of the loss coefficient were calculated. According to the map analysis, it was clear that the transmissivity of $CuInS_2$ crystal was located in the wavelength range of 750~1 500 nm, The $CuInS_2$ quantum dot crystal was a potential near infrared imaging tracer. In target therapy, we used the $CuInS_2$ quantum dots crystal to mark the nano-particles to achieve the tracer effect.

Keywords: quantum dots; $CuInS_2$; optical properties

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net