DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.01.003

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第1期 Journal of Capital Normal University No.1
2019年2月 (Natural Science Edition) Feb.,2019

概率方法讨论图的点可区别边色数的上界*

崔俊峰

(陇南师范高等专科学校数信学院,甘肃 成县 742500)

摘 要

图的点可区别边染色是一个满足任意顶点色集合不相同的正常边染色,将所用的最少颜色数称为图的点可区别边色数.应用第一矩量原理和Lovász局部引理给出了图的点可区别边色数的两个上界.

关键词: 第一矩量原理; Lovász局部引理; 点可区别边染色; 上界

中图分类号: O212

1 引言及主要引理

本文所考虑的图均为简单图.设 $G=(V,E)$ 表示点集为 V,边集为 E 的图,n 和 d 分别表示图 G 的阶和最大度.图 G 中任意两个顶点间距离的最大值称为图的直径.

2002年国际数学家大会上N Alon作了离散数学方法与挑战的一小时报告,从而使图的概率方法这个新颖,活跃的研究领域受到国际数学界的普遍关注.概率方法主要用来证明具有某些特定属性的目标存在性,目前在很多领域发挥着重要的作用.在图的染色方面,概率方法最大的优点是其用来证明目标组合对象的存在性而无需明确地将他们构造出来.事实上,Lovász局部引理是证明具有某些特定属性的目标存在性的一个非常重要的工具.利用概率方法证明图的点可区别边色数的具体思路是:需要合理地构造一个概率空间,也就是将一个恰当的概率模型要定义在我们要研究的对象上,并使我们的目标结构是该概率空间的一个事件,然后证明该事件发生的概率大于0.

图的边染色[1]是图经典染色理论的重要组成部分.20世纪60年代以来,Vizing和Gupta分别独立证明了任意一个简单图,其边色数不超过 $d+1$.1997年,Burris和Schelp[2]根据信息科学首先引入了图的点可区别边染色的概念,并给出了图的点可区别边色数的一个关于最大度与最大度点数所确定的上界.下面给出图的点可区别边染色的定义.

定义1.1[4] 对简单图 G,设映射 $f:E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$ 满足:

(i) 对 $\forall uv,uw\in E(G)$,有 $f(uv)\neq f(uw)$;

(ii) 对 $\forall u,v\in V(G)$,有 $S(u)\neq S(v)$,其中 $S(u)=\{f(uv)\mid uv\in E(G)\}$;

则称 f 是图 G 的 k-点可区别边染色,简记为图 G 的 k-$VDEC$,并记 $\chi'_{vd}(G)=\min\{K\mid G$ 有 k-$VDEC\}$ 是图 G 的点可区别边色数.

2011年,张东翰、张忠辅[3]讨论了图的邻点强可区别全色数的上界;随后,田京京[4]分别用Lovász局部引理的最简单形式和一般形式证明了图的邻点可区别全染色的色数上界,陆尚辉[5]讨论了用Lovász局部引理的一般形式证明图的邻点强可区别全染色的色数上界.本文主要利用第一矩量原理和Lovász局部引理讨论 n 阶最大度为 d 的图点可区别边染色的上界.

下面给出一些重要的引理,这些引理在本文随后的证明中将起到重要的作用.

引理1.1 (Markov不等式)[6] 对任意的正随机变量 X,有 $Pr(X\geq t)\leq E(X)/t$.

引理1.2 (第一矩量原理)[6] 如果 $E(X)\leq t$,则 $Pr(X<t)>0$.

引理1.3 (Lovász局部引理的最简单形式)[6] 考虑(典型的坏的)事件的集合 ε,使得对

收稿日期:2017-08-10

* 甘肃省高等学校科研项目(2015A-181)

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

每一个 $A\in\varepsilon$,有(1) $Pr(A)\leqslant p<1$; (2) A 与至多 d 个事件之外的其它事件的集合互相独立. 如果 $4pd\leqslant 1$,则 ε 中所有事件都不发生的概率是正的(不等式 $4pd\leqslant 1$ 可被 $ep(d+1)<1$ 代替).

2 主要结果

对于阶数不小于 3 的连通图,若取 $k=|E(G)|$,显然图 G 具有一个 $k-VDEC$. 因此,对于一个阶数不小于 3 的连通图 G,其 $k-VDEC$ 是存在的. 事实上,我们关心的是图 G 的点可区别边色数的具体值,然而求解图 G 的点可区别边色数是一个 Np-难问题. 因此,确定其点可区别边色数的上界就变得尤为重要. 下面,应用概率方法通过第一矩量原理与 Markov 不等式给出图 G 的点可区别边色数的一个上界.

定理 2.1　对于 n 阶最大度为 $d(\geqslant 3)$ 的图 G,则 $\chi'_{vd}(G)\leqslant nd(d-1)$.

证明　取 $k=nd(d-1)$,从颜色集合 $\{1,2,\cdots,k\}$ 中给图 G 的每条边随机地均匀分配一种颜色,使每条边的颜色的选择与所有其他边的颜色选择独立. 为了保证点可区别的边染色,必须满足以下两点: 正常边染色; 点可区别的. 为了运用第一矩量原理[5]与 Markov 不等式[5],构造对应指标变量并计算期望值:

(I) 对每两条相邻的边 e 与 f,令 $X_{ef}=\begin{cases}1, & \text{如果 } e,f \text{ 颜色一样}\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$,$X=\sum_{e,f\in E(G)}X_{ef}$ 表示不满足正常边染色的相邻边对的数目. 又 $pr(X_{ef}=1)=\frac{1}{k}$(相邻边染同色只能是 k 种颜色中的一种),所以 $E(X_{ef})=1\cdot pr(X_{ef}=1)+0\cdot pr(X_{ef}=0)=\frac{1}{k}$. 在图 G 中相邻边对的数目至多有 $n\cdot\binom{d}{2}$. 由期望的线性性可知,

$$E(X)=\sum_{e,f\in E(G)}E(X_{ef})\leqslant n\cdot\binom{d}{2}\cdot\frac{1}{k}=\frac{nd(d-1)}{2k}<\frac{1}{2}.$$

(II) 对任意两个点 u, v, 令 $Y_{uv}=\begin{cases}1, & \text{如果 } u \text{ 和 } v \text{ 满足 } S(u)=S(v)\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$ (其中 $S(u)$ 表示与点 u 相邻的边所染的颜色集)[5]. 令 $Y=\sum_{u,v\in V(G)}Y_{uv}$, 表示不满足点可区别的点对的数目. 由于

$$pr(Y_{uv}=1)=\frac{1}{\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{d}}<\frac{1}{\left(\frac{k}{d}\right)^d}\quad(k\geqslant 2d),$$

所以有

$$E(Y_{uv})=1\cdot pr(Y_{uv}=1)+0\cdot pr(Y_{uv}=0)=\frac{1}{\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{d}}<\frac{1}{\left(\frac{k}{d}\right)^d}.$$

在图 G 中,不满足点可区别的点对至多有 $\binom{n}{2}$. 由期望的线性性可得

$$E(Y)=\sum_{u,v\in V(G)}E(Y_{uv})\leqslant\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{d}\right)^d}=\frac{n(n-1)}{\left(\frac{k}{d}\right)^d}<\frac{1}{2}.$$

要使(I),(II)都成立,当 $k=nd(d-1)$, $d\geqslant 3$ 时,根据 Markov 不等式有,$E(X)+E(Y_{uv})<1$, 即 $pr(X>0)+pr(Y>0)<1$. 于是由引理可得,

$$pr(X=0,Y=0)\geqslant 1-pr(X>0)-pr(Y>0)>0,$$

定理得证.

定理 2.2　对于任一最大度为 d 直径为 β 的 n 阶图 G,则 $\chi'_{vd}(G)\leqslant 20d^{2\beta}+1$.

证明　取 $k=20d^{2\beta}+1$, $f:E\to\{1,2,\cdots,k\}$,表示 G 的边的随机染色,并对任意的 $e\in E(G)$, $f(e)\in\{1,2,\cdots,k\}$ 中随机地均匀地选择的. 为了保证点可区别边染色,必满足两条件:

(A) 正常边染色——没有两条相邻的边染成同一种颜色;

(B) 点可区别——没有任意一对顶点关联同样的颜色集合,即对 $\forall u,v$, $S(u)\neq S(v)$,其中 $S(u)$ 表示与顶点 u 关联的边所染颜色集合.

由此定义如下坏事件[6]:

(I) 对每一对相邻的边 $A=\{e_1,e_2\}$,令 E_A 表示 e_1 和 e_2 被染成同种颜色的事件;

(II) 对距离不超过 β 的任意两点 u 和 v, $d(u)=d(v)$,其中 $d(x)$ 表示 x 点的度,令 E_B 为点 u 和 v 的色集合 $S(u)=S(v)$ 的事件.

如果事件(I),(II)都不发生,则 f 是 G 的点可

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

区别的边染色.

1) 计算坏事件发生的概率

$$pr(E_A)=\frac{1}{k},$$

$$pr(E_B)=\frac{1}{\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots+\binom{k}{d}}<\frac{1}{dk}.$$

由 Lovász 局部引理的最简单形式的要求,取 $p=\frac{1}{k}$.

2) 计算相关事件数

构造相关图 H,其结点为两种类型的所有事件,其中两个结点 E_x 和 E_y 相关,当且仅当 x 和 y 包含一公共元素.因为每个事件 E_x 的发生仅依赖于 x 的元素,所以 H 是上述事件的相关图.

由相关图的构造得到事件(I)与事件(II)的相关事件数如下表:

	I	II
I	$4d$	$3d^{\beta}$
II	$4d^{\beta+1}$	$d^{2\beta}$

由 Lovász 局部引理的最简单形式,要使结论成立,只需说明一个事件即可,必保证该事件与其他事件的集合互相独立的个数 D 最大.令相关事件数为: $D=4d^{\beta+1}+d^{2\beta}<5d^{2\beta}$,有 $4pD=4\cdot\frac{1}{k}\cdot 5d^{2\beta}<1$,即 G 存在 k-点可区别边染色.

参 考 文 献

[1] BONDY J A, MARTY U S R. Graph theory with applications [M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] BURRIS A C, SCHELP R H. Vertex-distinguishing proper edge-colorings [J]. Journal of Graph Theory, 1997, 26(2): 73-82.

[3] 张东翰, 张忠辅. 图的邻点强可区别全色数的上界 [J]. 数学进展, 2011,40(2):168-172.

[4] 田京京. 图的 D(β) -点可区别边染色及其概率方法 [D]. 兰州: 西北师范大学, 2007.

[5] 陆尚辉. 概率方法与邻点可区别全染色的色数上界 [D]. 北京: 中央民族大学, 2013.

[6] MICHAEL M, BRUCE R. Graph Colouring and the Probabilistic Method [M]. New York: Springer, 2002.

Discussing the Upper Bounds on Vertex-Distinguishing Edge Coloring of a Graph by Probability Method

CUI Junfeng

(Department of mathematics, Longnan Teachers´ College, Chengxian Gansu 742500)

Abstract

A vertex-distinguishing edge coloring of a graph is a proper edge coloring such that no two vertices have the same color sets, the minimum number of the required colors is called the vertex-distinguishing edge chromatic number. In this pape, we mainly obtain two upper bounds on vertex-distinguishing edge coloring of a graph by the Principle of first moment and the Lovász local lemma.

Keywords: the principle of first moment; the Lovász local lemma; vertex distinguishing equitable edge coloring; upper boundary

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net