DOI:10.19789/j.1004-9398.2023.03.002
文献引用:姜曼.格蕴涵代数的区间值犹豫模糊子代数[J].首都师范大学学报(自然科学版),2023,44(3):7-11. JIANG M. Interval valued hesitant fuzzy subalgebras of Lattice Implication Algebras[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2023,44(3):7-11.

格蕴涵代数的区间值犹豫模糊子代数

姜 曼*

(西安交通工程学院公共课部,陕西 西安 710300)

摘要:把区间值犹豫模糊集和格蕴涵代数相结合,给出格蕴涵代数的区间值犹豫模糊子代数的概念,讨论了区间值犹豫模糊子代数与其犹豫模糊子代数的关系。证明了2个区间值犹豫模糊子代数的交是区间值犹豫模糊子代数,并结合具体例子,说明2个区间值犹豫模糊子代数并不满足类似结论。

关键词:格蕴涵代数;区间值犹豫模糊集;区间值犹豫模糊子代数
中图分类号:O159 **文献标识码**:A

Interval valued hesitant fuzzy subalgebras of Lattice Implication Algebras

JIANG Man*

(School of Public Courses, Xi'an Traffic Engineering Institute, Xi'an Shaanxi 710300)

Abstract: This paper combines interval valued hesitant fuzzy sets with Lattice Implication Algebras, gives the concept of interval valued hesitant fuzzy subalgebras of Lattice Implication Algebras, and discusses the relationship between interval valued hesitant fuzzy subalgebras and their hesitant fuzzy subalgebras. It is proved that the intersection of two interval valued hesitant fuzzy subalgebras is an interval valued hesitant fuzzy subalgebra. Combined with specific examples, it is clear that the intersection of two interval valued hesitant fuzzy subalgebras does not meet similar conclusions.

Keywords: Lattice Implication Algebra; interval valued hesitant fuzzy set; interval valued hesitant fuzzy subalgebras
CLC:O159 **DC**:A

0 引 言

自从模糊集[1]的概念被提出后,模糊集已经应用到生活中的各个方面。模糊集及其扩展在处理问题中的不确定性方面取得了很大的成功,在世界范围内,人们对模糊集的应用兴趣正在迅速增长。由于需要考虑元素之间非此即彼的关系,Atanassotv[2]提出了直觉模糊集;由于客观事物都具有两极性,在处理问题中难免有更多的不确定性,Zhang[3]提出了双极值模糊集的概念;彭家寅[4]表明Ω-模糊集是经典凸集的推广,是线性空间中一类特殊的模糊集;为了能够更全面、更精确地了解决策者对信息的判断,Torra[5]提出了犹豫模糊集;在模糊蕴涵代数[6]的基础上,徐扬[7]1993年提出了格蕴涵代数的概念。有关模糊蕴涵代数的子代数的研究,现阶段学者们做了大量工作:刘熠等[8]研究了区间

收稿日期:2021-11-03
* 通信作者:jiangman2008@yeah.net

值(α,β)模糊格蕴涵子代数;傅小波等[9]研究了格蕴涵代数的$(\in,\in\vee q_{(\lambda,\mu)})$-模糊子代数;特别地,傅小波和张建忠[10-11]、刘春辉[12]在格蕴涵代数中研究犹豫模糊LI-理想与反犹豫模糊滤子,相关结论丰富了格蕴涵代数理论。由于在决策问题中,决策者因为获取信息的有效性并不充分,因此很难用准确信息表达个人的建议,但是可以表达$[0,1]$区间的数。于是,Chen等[13]定义了区间值犹豫模糊集的概念,其允许一个元素的隶属度可以由几个可能的区间构成的集合。本文把区间值犹豫模糊集与格蕴涵代数相结合,研究格蕴涵代数的区间值犹豫模糊子代数,丰富和拓展了格蕴涵代数理论。

1 预备知识

定义 1.1[14] 设$(L,\vee,\wedge,',\to,O,I)$是有界格,$O$是最小元,$I$是最大元,$':L\to L$是格中偏序$\leqslant$的逆序对合对应,$\to:L\times L\to L$是一个映射。称$(L,\vee,\wedge,',\to,O,I)$是一个格蕴涵代数,如果$\forall x,y,z\in L$,满足下列条件:

(1) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$;

(2) $x\to x=I$;

(3) $x\to y=y'\to x'$;

(4) 若$x\to y=y\to x=I$,则$x=y$;

(5) $(x\to y)\to y=(y\to x)\to x$;

(6) $(x\vee y)\to y=(x\to z)\wedge(y\to z)$;

(7) $(x\wedge y)\to y=(x\to z)\vee(y\to z)$;

称为L是格蕴涵代数。

引理 1.1[14] 设L是格蕴涵代数,$\forall x,y\in L$,则

(1) $O\to x=I,x\to I=I,I\to x=x$且$x\to O=x'$;

(2) $x\leqslant y$当且仅当$x\to x=I$;

(3) $x\to y\leqslant(y\to z)\to(x\to z)$且$x\vee y=(x\to y)\to y$。

定义 1.2[14] 设L是格蕴涵代数且$S\subseteq L$,称S是L的一个格蕴涵子代数,如果下列条件成立:

(1) $(S,\vee,\wedge,')$是$(L,\vee,\wedge)$的一个带有逆序对合对应的子格;

(2) 任意的$x,y\in L,x,y\in S\Rightarrow x\to y\in S$。

引理 1.2[14] 设L是格蕴涵代数且$S\subseteq L$,则S是L的一个格蕴涵子代数当且仅当其满足:

(1) $O\in S$;

(2) 任意的$x,y\in L,x,y\in S\Rightarrow x\to y\in S$。

定义 1.3[14] 设L_1和L_2是2个格蕴涵代数,称映射$f:L_1\to L_2$是L_1到L_2的格蕴涵同态,如果f保持$\to,\vee,\wedge,'$运算。显然,当f是L_1到L_2的格蕴涵同态时有$f(O)=O$且$f(I)=I$。

定义 1.4[1] 设X是一个非空集合,X上的一个模糊集是指映射$\mu:X\to[0,1]$。

定义 1.5[7] 称格蕴涵代数L上的模糊集μ是L的模糊子代数,如果μ满足:

(FS-1) $\mu(O)=\mu(I)$;

(FS-2) $\mu(x\to y)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(y)\},\forall x,y\in L$。

若μ是L的模糊子代数,则

$$\mu(O)=\mu(I)=\mu(x\to x)\geqslant\min\{\mu(x),\mu(x)\}=\mu(x),\forall x\in L。$$

定义 1.6[15] 一个区间数$\tilde{a}$是指闭区间$[a^-,a^+]$,其中$0\leqslant a^-\leqslant a^+\leqslant 1$。区间数的全体之集记为$D[0,1]$,特别地,区间$[a,a]$等同于$a\in[0,1]$。

对于区间数$\tilde{a}_i\in[a_i^-,a_i^+]\in D[0,1]$,$\tilde{b}_i\in[b_i^-,b_i^+]\in D[0,1],i\in I$,定义:

(1) $r\min[\tilde{a}_i,\tilde{b}_i]=[\min\{a_i^-,b_i^-\},\min\{a_i^+,b_i^+\}]$;

(2) $r\inf\{\wedge a_i\}_{i\in I}=[\wedge_{i\in I}a_i^-,\wedge_{i\in I}a_i^+]$;

(3) $r\max[\tilde{a}_i,\tilde{b}_i]=[\max\{a_i^-,b_i^-\},\max\{a_i^+,b_i^+\}]$;

(4) $r\sup\{\wedge a_i\}_{i\in I}=[\vee_{i\in I}a_i^-,\vee_{i\in I}a_i^+]$;

(5) $\tilde{a}_1\leqslant\tilde{a}_2\Leftrightarrow a_1^-\leqslant a_2^-$且$a_1^+\leqslant a_2^+$;

(6) $\tilde{a}_1=\tilde{a}_2\Leftrightarrow a_1^-=a_2^-$且$a_1^+=a_2^+$;

(7) $\tilde{a}_1<\tilde{a}_2\Leftrightarrow\tilde{a}_1\leqslant\tilde{a}_2$且$\tilde{a}_1\neq\tilde{a}_2$;

(8) $k\tilde{a}=[ka^-,ka^+]$,其中$k\in[0,1]$。

定义 1.7[5] 设X为一个给定集合,一个X上的犹豫模糊集A的定义为

$$A=\{(x,h_A(x))|x\in X\},$$

式中$h_A(x)$是由区间$[0,1]$上若干个不同值构成的集合,表示X中的元素x属于集合A的若干种可能隶属度。

定义 1.8[13] 论域X上的一个区间值犹豫模糊集为$A:X\to P[0,1]$,即指集合$A=\{(x,[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)])|x\in X\}$,其中$h_{A^-},h_{A^+}$是$X$上的2个犹豫模糊集,分别称为区间值犹豫模糊集$A$的上下隶属函数,且$h_{A^-}(x)\subseteq h_{A^+}(x),\forall x\in X$。记$X$上的全体区间值犹豫模糊集记为$\mathrm{IHF}(X)$。

如果令$h_A(x)=[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)]$,则$A=\{(x,h_A(x))|x\in X\}$,其中$h_A:X\to P[0,1]$。设$F,G$是$X$上的区间值犹豫模糊集,$\forall x\in X$,区间值犹豫模糊集$F\cap G$和$F\cup G$分别定义为:

$$h_{A\cap B}(x)=r\min\{h_A(x),h_B(x)\},$$
$$h_{A\cup B}(x)=r\max\{h_A(x),h_B(x)\}。$$

2　格蕴涵代数的区间值犹豫模糊子代数

定义 2.1　设L是格蕴涵代数,若$A\in \mathrm{IHF}(L)$,如果A满足以下条件:

(IHF-1)$h_A(O)=h_A(I)$;

(IHF-2)$h_A(x\to y)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(y)\}$;

$\forall x,y\in L$。

则称A为L上的区间值犹豫模糊子代数。记L上的全体区间值犹豫模糊子代数为$\mathrm{IHFS}(L)$。

例 2.1　设$L=\{O,a,b,c,d,e,f,I\}$,L上的Hasse图(图1),L上的运算$\to$和运算$'$的定义分别如表1和表2所示。则$(L,\vee,\wedge,',\to)$是一个格蕴涵代数。令$A\in\mathrm{IHF}(L)$,使得

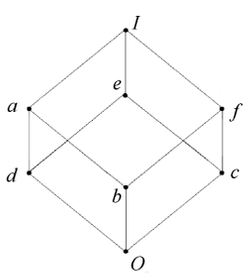


图1　L的Hasse图

表1　运算$\to$的定义

$\to$	O	a	b	c	d	e	f	I
O	I	I	I	I	I	I	I	I
a	f	I	f	f	I	I	f	I
b	e	e	I	e	I	e	I	I
c	d	d	d	I	d	I	I	I
d	c	e	f	c	I	e	f	I
e	b	d	b	f	b	I	f	I
f	a	a	d	e	d	e	I	I
I	O	a	b	c	d	e	f	I

表2　运算$'$的定义

x	x'
O	I
a	f
b	e
c	d
d	c
e	b
f	a
I	O

$$h_A(O)=h_A(a)=h_A(f)=h_A(I)=[0.4,0.9],$$
$$h_A(b)=h_A(c)=h_A(d)=h_A(e)=[0.3,0.8],$$

容易验证,$A\in\mathrm{IHFS}(L)$。

定理 2.1　设L是格蕴涵代数,若$A\in\mathrm{IHF}(L)$,则$A\in\mathrm{IHFS}(L)$当且仅当犹豫模糊集h_{A^-},h_{A^+}都是L上的犹豫模糊子代数。

证明　$\Leftarrow$:假设犹豫模糊集h_{A^-}和h_{A^+}都是L上的犹豫模糊子代数。则由区间值模糊集的性质和(FS-1)可得

$$h_A(O)=[h_{A^-}(O),h_{A^+}(O)]=[h_{A^-}(I),h_{A^+}(I)]=h_A(I),$$

且由(FS-2),$\forall x,y\in L$,有

$$h_A(x\to y)=[h_{A^-}(x\to y),h_{A^+}(x\to y)]\supseteq[\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(y)\},\min\{h_{A^+}(x),h_{A^+}(y)\}]=r\min\{[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)],[h_{A^-}(y),h_{A^+}(y)]\}=r\min\{h_A(x),h_A(x)\}。$$

因此,由定义2.1可得$A\in\mathrm{IHFS}(L)$。

$\Rightarrow$:设$A\in\mathrm{IHFS}(L)$,则

$$[h_{A^-}(O),h_{A^+}(O)]=h_A(O)=h_A(I)=[h_{A^-}(I),h_{A^+}(I)],$$

因此$h_{A^-}(O)=h_{A^-}(I)$且$h_{A^+}(O)=h_{A^+}(I)$。设$x,y\in L$,则

$$[h_{A^-}(x\to y),h_{A^+}(x\to y)]=h_A(x\to y)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(y)\}=r\min\{[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)],[h_{A^-}(y),h_{A^+}(y)]\}=[\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(y)\},\min\{h_{A^+}(x),h_{A^+}(y)\}],$$

从而

$$h_{A^-}(x\to y)\supseteq\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(y)\}$$

且$h_{A^+}(x\to y)\supseteq\min\{h_{A^+}(x),h_{A^+}(y)\}$。因此,$h_{A^-}$和$h_{A^+}$都是$L$上的犹豫模糊子代数。

定理 2.2　设L是格蕴涵代数,令$A\in\mathrm{IHFS}(L)$,则对$\forall x,y\in L$,有:

(IHF-3)$h_A(O)=h_A(I)\supseteq h_A(x)$;

(IHF-4)$h_A(x)=h_A(x')$;

(IHF-5)$h_A(x\vee y)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(y)\}$;

(IHF-6)$h_A(x\wedge y)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(y)\}$。

证明　(1)(IHF-3)的证明:由(I2)、(IHF-1)和(IHF-2)得

$$h_A(O)=h_A(I)=h_A(x\to x)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(x)\}=$$

$$[\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(x)\},\min\{h_{A^+}(y),h_{A^+}(y)\}]=$$
$$[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)]=h_A(x)。$$

(2)由(I3)、引理1.1(1)、(IHF-2)和(IHF-3),及h_{A^-}和h_{A^+}都是L上的模糊子代数,得

$$h_A(x)=h_A(I\to x)=h_A(x'\to I')=$$
$$h_A(x'\to O)\supseteq$$
$$r\min\{h_A(x'),h_A(O)\}=$$
$$[\min\{h_{A^-}(x'),h_{A^-}(O)\},\min\{h_{A^+}(x'),h_{A^+}(O)\}]=$$
$$[h_{A^-}(x'),h_{A^+}(x')]=h_A(x')。$$

另一方面,由引理1.1(1)、(IHF-2)和(IHF-3)可得

$$h_A(x')=h_A(x\to O)\supseteq$$
$$r\min\{h_A(x),h_A(O)\}=$$
$$[\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(O)\},\min\{h_{A^+}(x),h_{A^+}(O)\}]=$$
$$[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)]=h_A(x)。$$

综上可得$h_A(x)=h_A(x')$,即证(IHF-4)。

(3)由引理1.1(3)和(IHF-2)可得

$$h_A(x\vee y)=h_A((x\to y)\to y)\supseteq$$
$$r\min\{h_A(x\to y),h_A(y)\}\supseteq$$
$$r\min\{r\min\{h_A(x),h_A(y)\},h_A(y)\}=$$
$$r\min\{h_A(x),h_A(y)\},$$

即证(IHF-5)。

(4)由(IHF-4)、(IHF-5)和De Morgan律可得

$$h_A(x\wedge y)=h_A((x\wedge y)')=h_A(x'\vee y')\supseteq$$
$$r\min\{h_A(x'),h_A(y')\}=$$
$$r\min\{h_A(x),h_A(y)\},$$

即证(IHF-6)。

定理2.3 设L是格蕴涵代数,若$A,B\in\mathrm{IHFS}(L)$,则$A\cap B\in\mathrm{IHFS}(L)$。

证明 因为$A,B\in\mathrm{IHFS}(L)$,所以由定理2.1可得

$$h_{A\cap B}(O)=r\min\{h_A(O),h_B(O)\}=$$
$$r\min\{h_A(I),h_B(I)\}=h_{A\cap B}(I)。$$

且$\forall x,y\in L$,有

$$h_{A\cap B}(x\to y)=r\min\{h_A(x\to y),h_B(x\to y)\}=$$
$$[\min\{h_{A^-}(x\to y),h_{B^-}(x\to y)\},\min\{h_{A^+}(x\to y),h_{B^+}(x\to y)\}]\supseteq$$
$$[\min\{\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(y)\},\min\{h_{B^-}(x),h_{B^-}(y)\}\},\min\{\min\{h_{A^+}(x),h_{A^+}(y)\},\min\{h_{B^+}(x),h_{B^+}(y)\}\}]=$$
$$[\min\{\min\{h_{A^-}(x),h_{B^-}(x)\},\min\{h_{A^-}(y),h_{B^-}(y)\}\},\min\{\min\{h_{A^+}(x),h_{B^+}(x)\},\min\{h_{A^+}(y),h_{B^+}(y)\}\}]=$$
$$r\min\{[\min\{h_{A^-}(x),h_{B^-}(x)\},\min\{h_{A^+}(x),h_{B^+}(x)\}],[\min\{h_{A^-}(y),h_{B^-}(y)\},\min\{h_{A^+}(y),h_{B^+}(y)\}]\}=$$
$$r\min\{r\min\{h_A(x),h_B(x)\},r\min\{h_A(y),h_B(y)\}\}=$$
$$r\min\{h_{A\cap B}(x),h_{A\cap B}(y)\}。$$

故$h_{A\cap B}(x\to y)\supseteq r\min\{h_{A\cap B}(x),h_{A\cap B}(y)\}$。因此$A\cap B\in\mathrm{IHFS}(L)$。

注 若$A,B\in\mathrm{IHFS}(L)$,但是$A\cup B\notin\mathrm{IHFS}(L)$。用以下例子可以说明:

L为例2.1中定义的格蕴涵代数,在L上定义区间值犹豫模糊集A和B,使得

$$h_A(O)=h_A(a)=h_A(f)=h_A(I)=[1,1],$$
$$h_A(b)=h_A(c)=h_A(d)=h_A(e)=[0.3,0.8],$$
$$h_B(O)=h_B(b)=h_B(e)=h_B(I)=[1,1],$$
$$h_B(a)=h_B(c)=h_B(d)=h_B(f)=[0.2,0.7],$$

则可证$A,B\in\mathrm{IHFS}(L)$,但是$A\cup B\notin\mathrm{IHFS}(L)$,这是因为

$$h_{A\cup B}(f\to b)=r\max\{h_A(d),h_B(d)\}=$$
$$[0.3,0.8]\not\supseteq$$
$$r\min\{h_{A\cup B}(f),h_{A\cup B}(b)\}=[1,1]。$$

定理2.4 设L是格蕴涵代数,若$A\in\mathrm{IHF}(L)$,则$A\in\mathrm{IHFS}(L)$当且仅当$\forall[\lambda_1,\lambda_2]\in P[0,1]$,$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])\neq\varnothing$时,$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$为$L$的子代数。其中

$$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])=\{x\in X|h_A(x)\supseteq[\lambda_1,\lambda_2]\}。$$

证明 $\Leftarrow$:假设$\forall[\lambda_1,\lambda_2]\in P[0,1]$,当$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])\neq\varnothing$时,有$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$为$L$的子代数。设$h_A(I)=[\lambda_1,\lambda_2]$,则$I\in U(A;[\lambda_1,\lambda_2])\neq\varnothing$,从而由假设知$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$为$L$的子代数,因此$0=I'\in U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$,故$h_A(O)\supseteq[\lambda_1,\lambda_2]=h_A(I)$;再设$h_A(O)=[\lambda_1,\lambda_2]$,用类似的方法可证$h_A(I)\supseteq h_A(O)$,所以$h_A(I)=h_A(O)$。

现在$\forall x,y\in L$,假设$[\lambda_1,\lambda_2]=r\min\{h_A(x),h_A(y)\}$,则

$$\lambda_1=\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(y)\},$$
$$\lambda_2=\min\{h_{A^+}(x),h_{A^+}(y)\},$$

故

$$h_A(x)=[h_{A^-}(x),h_{A^+}(x)]\supseteq[\lambda_1,\lambda_2],$$

且

$$h_A(y)=[h_{A^-}(y),h_{A^+}(y)]\supseteq[\lambda_1,\lambda_2],$$

所以可得$x,y\in U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$,从而$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])\neq\varnothing$,进而由假设知$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$为$L$的子代数。于是

$$x\to y\in U(A;[\lambda_1,\lambda_2]),$$

因此又可得

$$h_A(x\to y)\supseteq[\lambda_1,\lambda_2]=r\min\{h_A(x),h_A(y)\}。$$

这样就证明了$A\in\mathrm{IHFS}(L)$。

$\Rightarrow$:设$A\in\mathrm{IHFS}(L)$且$[\lambda_1,\lambda_2]\in P[0,1]$使得$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])\neq\varnothing$,$x,y\in U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$,则有$h_A(x)\supseteq[\lambda_1,\lambda_2]$且$h_A(y)\supseteq[\lambda_1,\lambda_2]$,于是由定义2.1和定理2.2可得

$$h_A(O)\supseteq h_A(x)\supseteq[\lambda_1,\lambda_2],$$

且

$$h_A(x\to y)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(y)\}=$$
$$[\min\{h_{A^-}(x),h_{A^-}(y)\},\min\{h_{A^+}(y),h_{A^+}(y)\}]\supseteq$$
$$[\min\{\lambda_1,\lambda_1\},\min\{\lambda_2,\lambda_2\}]=[\lambda_1,\lambda_2],$$

因此,$O,x\to y\in U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$,故由引理1.2知$U(A;[\lambda_1,\lambda_2])$为$L$的子代数。

定理2.5　设L是格蕴涵代数,若$A\in\mathrm{IHFS}(L)$,则集合

$$B:=\{x\in L|h_A(x)=h_A(O)\}$$

为L的子代数。

证明　由(IHF-1)可知$1\in B$,从而$B\neq\varnothing$。设$x,y\in B$,则

$$h_A(x\to y)\supseteq r\min\{h_A(x),h_A(y)\}=$$
$$r\min\{h_A(O),h_A(O)\}=h_A(O)。$$

因此,结合(IHF-3)可得$h_A(x\to y)=h_A(O)$,故$x\to y\in B$。所以,由引理1.2知B为L的子代数。

3　结束语

作为模糊集一个重要分支,犹豫模糊集对研究格蕴涵代数有非常重要的理论意义。许多文献在研究了格蕴涵代数理论时,侧重点主要是此代数中的滤子和理想等相关性质。本文在相关概念的基础上研究了格蕴涵代数的区间值犹豫模糊子代数,讨论了一些性质,丰富了格蕴涵代数和犹豫模糊集的理论研究。

参 考 文 献

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965,8(3):338-353.

[2] ATANASSOTV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Set and Systems,1986,20(1):87-96.

[3] ZHANG W R. Bipolar fuzzy sets and relations: a computational framework for cognitive modeling and multiagent decision analysis [C]//ZHANG W R. Processings of the First International Joint Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society BI Conference. Berlin:Springer,1994.

[4] 彭家寅. BCH-Ω-代数的模糊点理想[J].模糊系统与数学,2009,23(6):5-11.

[5] TORRA V. Hesitant fuzzy sets [J]. International Journal of Intelligent Systems,2010,25(6):529-539.

[6] 吴望名. Fuzzy蕴涵代数[J].模糊系统与数学,1990,4(1):56-64.

[7] 徐扬.格蕴涵代数[J].西南交通大学学报,1993,28(1):20-27.

[8] 刘熠,徐扬,秦亚.区间值(α,β)模糊格蕴涵子代数[J].计算机科学,2011,38(4):263-266.

[9] 傅小波,廖祖华,郑高平,等.格蕴涵代数$(\in,\in\vee q_{(\lambda,\mu)})$-模糊子代数[J].模糊系统与数学,2014,28(6):44-52.

[10] 傅小波,张建忠.格蕴涵代数的犹豫模糊LI-理想[J].模糊系统与数学,2019,33(2):36-44.

[11] 傅小波,张建忠.格蕴涵代数的犹豫模糊滤子[J].模糊系统与数学,2020,34(2):34-43.

[12] 刘春辉.格蕴涵代数的生成$(\in,\in\vee q)$-IV模糊LI理想[J].数学的实践与认识,2020,50(8):281-286.

[13] CHEN N, XU Z, XIA M M. Interval-valued hesitant fuzzy preference relations and their applications to group decisionmaking[J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 37:528-540.

[14] XU Y, RUAN D, QIN K Y. Lattice-valued logic[M]. Berlin:Springer,2003.

[15] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its approximate reasoning[J]. Information Science, 1975, 8:199-249.

(责任编辑:马田田)