DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.03.002

关于 n 进制中位数函数的高次几何均值的计算*

车 雨 红
(渭南师范学院数理学院,陕西 渭南 714000)

摘 要

就自然数列的位数函数的高次几何均值的计算方法进行了研究,采用了归纳、猜想的方法得出了相关引理,再利用引理得出了高次几何均值的精确计算公式,并给出了证明. 它的研究与得出,解决了位数函数高次几何均值的计算问题,丰富了位数函数的理论知识,对函数高次几何均值的发展起着推动作用.

关键词: n 进制,位数函数,高次几何均值.
中图分类号: O156.4

1 引言及结论

在文[1]中,美国数论专家 smarandache 提出了初等数论及集合论中的第105个未解决的问题中的5个关于自然数列的性质问题,文[2-6]给出了在一个正整数的 n 进制表示中数字之和函数、之积函数及它的一次、二次、三次均值的精确计算公式,文[7-9]给出了位数函数均值及高次均值的计算公式. 但是,研究位数函数几何均值问题的文献很少,几乎没有. 本文主要用初等数论中的归纳、猜想的方法研究了自然数列的位数函数,得出了 n 进制表示中的位数函数的高次几何均值的精确计算公式,并给出了证明.

定义 设 $n(n\geqslant 2)$ 为一给定的正整数,对任一正整数 m,假定 m 在 n 进制中表示为 $m=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$,其中 $0<a_i<n, i=1,2,\cdots,s, k_1>k_2>\cdots k_s$. 记 $a(m,n)=k_1+1$,称 $a(m,n)$ 为 m 的位数函数;$A_r(N,n)$ 为位数函数 $a(m,n)$ 的 r 次几何均值,值为 $\prod\limits_{m<N}a^r(m,n)$,$r=1,2,3,\cdots$. 规定 $a(0,n)=1$

定理 设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$,其中,$0<a_i<n, i=1,2,\cdots,s, k_1>k_2>\cdots>k_s$.

则 $$A_r(N,n)=(k_1+1)^r\prod_{i=2}^{s}a_in^{k_i}\prod_{i=1}^{k_1}i^{r(a_1-1)n^{i-1}}. \quad (1)$$

推论1 设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$,其中 $0<a_i<n, i=1,2,\cdots,s, k_1>k_2>\cdots>k_s$. 则

$$A_1(N,n)=(k_1+1)\prod_{i=2}^{s}a_in^{k_i}\prod_{i=1}^{k_1}i^{(a_1-1)n^{i-1}}. \quad (2)$$

推论2 设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$,其中 $0<a_i<n, i=1,2,\cdots,s, k_1>k_2>\cdots>k_s$. 则

$$A_2(N,n)=(k_1+1)^2\prod_{i=2}^{s}a_in^{k_i}\prod_{i=1}^{k_1}i^{2(a_1-1)n^{i-1}}. \quad (3)$$

推论3 设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$ 其中 $0<a_i<n, i=1,2,\cdots,s, k_1>k_2>\cdots>k_s$. 则

$$A_3(N,n)=(k_1+1)^3\prod_{i=2}^{s}a_in^{k_i}\prod_{i=1}^{k_1}i^{3(a_1-1)n^{i-1}}. \quad (4)$$

推论4 设 $N=a_1n^{k_1}+a_2n^{k_2}+\cdots+a_sn^{k_s}$ 其中 $0<a_i<n, i=1,2,\cdots,s, k_1>k_2>\cdots>k_s$. 则

$$A_r(N,10)=(k_1+1)^r\prod_{i=2}^{s}a_i10^{k_i}\prod_{i=1}^{k_1}i^{r(a_1-1)10^{i-1}}. \quad (5)$$

2 引理及证明

为了证明定理,首先引入两个引理,并给出了证明.

引理1 设 k 为自然数,则有

$$A_r(n^k,n)=\prod_{i=1}^{k}i^{r(n-1)n^{i-1}}. \quad (6)$$

证明 对 k 作数学归纳法.

收稿日期:2015-07-06
* 陕西省自然科学基金资助项目(2014JM1026);渭南师范学院校级项目(15YKP015).

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

当 $k=1$ 时,可得,左边 $=A_r(n,n)=\prod_{m<n}a^r(n,n)=1$,右边 $=A_r(n,n)=1^{r(n-1)n^{1-1}}=1$ 等式成立.

假定 $k=q$ 时命题成立. 可知,$A_r(n^q,n)=\prod_{i=1}^{q}i^{r(n-1)n^{i-1}}$ 成立.

当 $k=q+1$ 时,

$$A_r(n^{q+1},n)=\prod_{m<n^{q+1}}a^r(m,n)$$

$$=\prod_{m<n^q}a^r(m,n)\prod_{n^q\leqslant m<2n^q}a^r(m,n)\cdots\prod_{(n-1)n^q\leqslant m<n^{q+1}}a^r(m,n)$$

$$=\prod_{m<n^q}a^r(m,n)\prod_{0\leqslant m<n^q}a^r(m+n^q,n)\cdots\prod_{0\leqslant m<n^q}a^r(m+(n-1)n^q,n)$$

$$=A_r(n^q,n)\cdot(q+1)^{r(n-1)n^q}$$

$$=\prod_{i=1}^{q}i^{r(n-1)n^{i-1}}\cdot(q+1)^{r(n-1)n^q}$$

$$=\prod_{i=1}^{q+1}i^{r(n-1)n^{i-1}}$$

即,当 $k=q+1$ 时,命题成立.

引理 2　设 k 为自然数,则有

$$A_r(an^k,n)=(k+1)^{r(a-1)n^k}\cdot\prod_{i=1}^{k}i^{r(n-1)n^{i-1}}\quad(7)$$

证明　$A_r(an^k,n)=\prod_{m<an^k}a^r(m,n)$

$$=\prod_{m<n^k}a^r(m,n)\prod_{n^k\leqslant m<2n^k}a^r(m,n)\cdots\prod_{(a-1)n^k\leqslant m<an^{k+1}}a^r(m,n)$$

$$=\prod_{m<n^k}a^r(m,n)\prod_{0\leqslant m<n^k}a^r(m+n^k,n)\cdots\prod_{0\leqslant m<n^k}a^r(m+(n-1)n^k,n)$$

$$=A_r(n^k,n)\cdot(k+1)^{r(a-1)n^k}$$

由引理 1 的公式(6),

$$=\prod_{i=1}^{k}i^{r(n-1)n^{i-1}}\cdot(k+1)^{r(a-1)n^k}$$

$$=(k+1)^{r(a-1)n^k}\cdot\prod_{i=1}^{k}i^{r(n-1)n^{i-1}}.$$

3　定理的证明

有了以上两个引理我们很容易给出定理的证明.

证明　$A_r(N,n)=\prod_{m<N}a^r(m,n)$

$$=\prod_{m<a_1n^{k_1}}a^r(m,n)\prod_{a_1n^{k_1}\leqslant m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k2}}a^r(m,n)\cdots\prod_{N-a_sn^{k_s}\leqslant m<N}a^r(m,n)\cdots$$

$$=A_r(a_1n^{k_1},n)\prod_{m<a_1n^{k_1}}a^r(m,n)\prod_{a_1n^{k_1}\leqslant m<a_1n^{k_1}+a_2n^{k2}}\cdot a^r(m,n)\cdots\prod_{N-a_sn^{k_s}\leqslant m<N}a^r(m,n)\cdots$$

$$=A_r(a_1n^{k_1},n)\prod_{0\leqslant m<a_2n^{k2}}a^r(m+a_1n^{k_1},n)\cdots\prod_{0\leqslant m<a_sn^{k_s}}a^r(m+N-a_sn^{k_s},n)\cdots$$

$$=A_r(a_1n^{k_1},n)\cdot(k_1+1)^{r\prod_{i=2}^{s}a_in^{k_i}}$$

由引理 2 的公式(7),

$$=(k_1+1)^{r\prod_{i=2}^{s}a_in^{k_i}}\prod_{i=1}^{k_1}i^{r(a_1-1)n^{i-1}}.$$

参　考　文　献

[1] Florentin Smarandche. Only Problems,Not Solutions! [M]. Xiquan Publishing House, 1993: 22 – 26.

[2] 李海龙,杨倩丽. 关于 n 进制及其有关计数函数 [J]. 纯粹数学与应用数学,2002,18(1): 13 – 15.

[3] 杨倩丽,李海龙. 关于 n 进制中数字之和函数均值的计算 [J]. 西北大学学报(自然科学版),2002,32(4): 361 – 362.

[4] 李海龙,杨倩丽. n 进制中非零数字之积函数的均值公式 [J]. 数学的实践与认识,2002,32(4): 683 – 686.

[5] 宋立温. 一个数论函数的均值公式 [J]. 潍坊学院学报,2007,7(2): 112 – 113.

[6] 杨倩丽. 一个数论函数的三次均值的计算 [J] 纺织高校基础科学学报,2002,15(1): 47 – 48.

[7] 陈斌. 关于二进制中位数函数均值的计算 [J]. 科学技术与工程, 2008,8(12): 3071 – 3074.

[8] 李海龙,赵小鹏,杨明顺. 关于位数函数均值的计算 [J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版),2004, 24(3): 251 – 252.

[9] 李海龙,周军. 关于位数函数高次均值的计算 [J]. 纯粹数学与应用数学,2009,25(4): 770 – 773.

[10] 潘承洞,潘承彪. 初等数论 [M]. 北京: 北京大学出版社,1998: 426 – 443.

[11] Kuipers,L. ,Remark on a paper by R. L. Duncan concerning the uniform Distribution mod1 of the sequence of the Logarithms of the Fibonacci numbers [M]. The Fibonacci Quarthrly,1969,7: 465 – 466.

[12] Robbins,N. ,Applications of Fibonacci Numbers [M]. Kluwer Academic Publishers,1986: 77 – 88.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

On High Power Geometric Mean Value Computations of the Location Number Function

Che Yuhong

(School of mathematics and physics, Weinan Normal University, Weinan 714000)

Abstract

It was studied the computations of high power geometric mean value, and used induction suspected methods then has obtained the direct lemmas which was related to, also using these directed lemmas to obtain the accurate fomula, also has given the proof. It solves the problem of the calculation of the higher geometric mean of the number of functions, and enriches the theoretical knowledge of the digit function, and promotes the development of high power geometric mean.

Key words: base n, the function of the location number, high power geometric mean value.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net