DOI：10.19789/j.1004-9398.2022.06.001
文献引用：刘明，戴凌飞，张霞. Hilbert空间中关于有限时滞随机发展方程的Trotter-Kato逼近体系[J]. 首都师范大学学报（自然科学版），2022，43（6）：1-7. LIU M，DAI L F，ZHANG X. Trotter-Kato approximations of stochastic evolution equations with finite delays in Hilbert Space[J]. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2022，43（6）：1-7.

Hilbert空间中关于有限时滞随机发展方程的Trotter-Kato逼近体系*

刘　明，戴凌飞，张　霞**

（天津工业大学数学科学学院，天津　300387）

摘要：介绍了随机发展方程Trotter-Kato逼近理论的研究进展，并在此基础上研究有限时滞随机发展方程关于适定解的Trotter-Kato逼近体系，最后给出此类随机发展方程在该逼近体系下关于参数依赖性的经典极限定理.

关键词：Trotter-Kato逼近体系；有限时滞随机发展方程；经典极限定理
中图分类号：O177.92

Trotter-Kato approximations of stochastic evolution equations with finite delays in Hilbert Space*

LIU Ming，DAI Lingfei，ZHANG Xia**

（School of Mathematical Sciences，Tiangong University，Tianjin　300387）

Abstract: In this paper，the research progress of the theory of Trotter-Kato approximations for stochastic evolution equations was introduced. Based on this，the Trotter-Kato approximations on the mild solutions of stochastic evolution equations with finite delays was studied，and then a classical limit theorem on the dependence of such equations on a parameter in the approximations system was derived.

Keywords: Trotter-Kato approximations; stochastic evolution equations with finite delays; classical limit theorem
CLC：O177.92

0　引　言

近年来，随机发展方程的逼近理论研究已引起了国内外许多相关领域著名学者的关注，如：Ichikawa[1]研究了半线性随机发展方程的Yosida逼近体系，并给出了该体系下适定解的指数稳定性，在此基础上，Govindan和Ahmed[2]进一步证明了此类方程适定解的鲁棒稳定性；Ahmed和Ding[3]研究了半线性随机发展方程中的非线性漂移项同时依赖于解过程在给定时刻的状态和概率分布，且常数可加扩散项为正对称有界算子时适定解的性质，并建立了方程关于适定解的Yosida逼近体系，从而给出解的指数稳定性；Govindan和Ahmed[4]研究了当方程中的非线性漂移项如文献[3]中定义，但常数可加

收稿日期：2021-10-08
* 国家自然科学基金项目（12171361）；教育部人文社会科学研究项目（20YJC790174）；“纺织之光”中国纺织工业联合会教学改革项目（2021BKJGLX616，2021BKJGLX686）
** 通信作者：zhangxia@tiangong.edu.cn

扩散项为算子值函数时的情况,接着通过方程适定解建立了Yosida逼近体系;Govindan[5-7]研究了上述3类随机发展方程适定解的Trotter-Kato逼近体系,并给出了其在该逼近体系下适定解诱导概率测度的弱收敛性,以及关于方程参数依赖性的经典极限定理.而且Trotter-Kato逼近理论研究在自然科学、工程学以及金融数学等众多学科所诱导的随机动力系统的模拟计算中起着越来越重要的作用.本文拟介绍随机发展方程的Trotter-Kato逼近理论的研究进展,并将在此基础上研究有限时滞随机发展方程关于适定解的Trotter-Kato逼近体系.

首先,回顾半线性随机发展方程

$$\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+f(t,x)]\,\mathrm{d}t+g(t,x)\,\mathrm{d}\omega(t),\ \forall t>0,\quad x(0)=x_0,\tag{1}$$

式中:A是Hilbert空间X上有界线性算子强连续半群$\{S(t),\ t\geqslant 0\}$的无穷小生成元;f是定义在$\mathbf{R}^+\times X$上的X值函数;g是定义在$\mathbf{R}^+\times X$上的$L(Y,X)$值函数;$\omega(t)$是Y值维纳过程;初值x_0是F_0可测X值随机变量.1982年,Ichikawa[1]证明了方程(1)适定解的存在唯一性;2015年,Govindan[6]通过适定解将Trotter-Kato逼近体系引入到该方程并得到了一些重要的结论;2015年,Govindan和Ahmed[4]对方程(1)中的非线性漂移项f进行了推广,使其同时依赖于随机过程$x(t)$在t时刻的状态和概率分布$\mu(t)$,改进后的方程为

$$\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+f(x(t),\mu(t))]\,\mathrm{d}t+g(x(t))\,\mathrm{d}\omega(t),\quad \forall t>0,x(0)=x_0,\tag{2}$$

式中:f为定义在$X\times M_{\gamma^2}X$上的X值函数(其中$M_{\gamma^2}X$是X上概率测度的子集).

1995年,Ahmed和Ding[3]考虑了当常数可加扩散项$g(x(t))=\sqrt{Q}$的情形.此时上述方程变为:

$$\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+f(x(t),\mu(t))]\,\mathrm{d}t+\sqrt{Q}\,\mathrm{d}\omega(t),\quad \forall t>0,x(0)=x_0,\tag{3}$$

式中Q是X上的正对称有界算子.2006年,Govindan[5]研究了方程(3)上的Trotter-Kato逼近体系.2018年,Govindan[7]根据方程的适定解引入了Trotter-Kato逼近体系,并给出在该体系下适定解诱导概率测度的弱收敛性.

基于此,本文将致力于研究有限时滞随机发展方程的Trotter-Kato逼近体系,进而得到一些有意义的结果.方程的具体形式为

$$\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+f(t,\pi_t x)]\,\mathrm{d}t+g(t,\pi_t x)\,\mathrm{d}\omega(t),\quad \forall t>0,\quad x(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in[-r,0]\ (0\leqslant r<\infty),\tag{4}$$

式中:$\pi_t x=\{x(t-r+s):0\leqslant s\leqslant r\}$;随机过程$\{\varphi(t),t\in[-r,0]\}$有几乎处处(*P-a.s.*)连续样本路径且$E\|\varphi\|_c^p<\infty$,$p\geqslant 2$.

1 预备知识

设X, Y为实可分Hilbert空间,$L(Y,X)$为所有从Y到X上的有界线性算子构成的空间,用符号$|\cdot|$表示X, Y和$L(Y,X)$中的范数.设$\left(\Omega,F,P,\{F_t\}_{t\geqslant 0}\right)$为完备概率空间,其中递增右连续族$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$是$F$的完备子$\sigma$-代数;设$\beta_n(t)$,$n=1,2,\cdots$,是一列定义在概率空间上相互独立的实值标准布朗运动;设$\omega(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\,\beta_n(t)\boldsymbol{e}_n$, $t\geqslant 0$,其中$\lambda_n\geqslant 0$,$n=1,2,\cdots$,是非负实数,$\{\boldsymbol{e}_n\}$,$n=1,2,\cdots$,是Y中的完备正交基;设$Q\in L(Y,Y)$是由$Q\boldsymbol{e}_n=\lambda_n\boldsymbol{e}_n$定义的算子.上述$Y$值随机过程$\omega(t)$称为$Q$-维纳过程.设$h(t)$是$L(Y,X)$值函数,$\lambda$是一个序列$\{\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots\}$,定义$|h(t)|_\lambda=\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|\sqrt{\lambda_n}\,h(t)\boldsymbol{e}_n|^2\right\}^{1/2}$,若$|h(t)|_\lambda^2<\infty$,则$h(t)$称为$\lambda$-希尔伯特-施密特算子.另外,用$\sigma(\lambda)(Y,X)$表示$\lambda$-希尔伯特-施密特算子$\sigma$: $Y\to X$组成的空间.

本文中用符号$A\in G(M,\alpha)$表示算子A是X上强连续算子半群$\{S(t),t\geqslant 0\}$的无穷小生成元,其中$\{S(t),t\geqslant 0\}$满足对任意$t\geqslant 0$,存在常数$M\geqslant 1$,$\alpha\geqslant 0$使得$\|S(t)\|\leqslant M\mathrm{e}^{\alpha t}$.

设$C:=C([-r,0];X)$是由连续函数$\varphi:[-r,0]\to X$组成的空间,该空间上的范数定义为$\|\varphi\|_c=\sup_{-r\leqslant s\leqslant 0}|\varphi(s)|$.

下面回顾Q-维纳过程的随机积分与方程适定解的概念及相关结论.

定义1.1[8] 设$\Phi:[0,\infty)\to\sigma(\lambda)(Y,X)$是一个$F_t$-适应过程.如果对任意的$t\geqslant 0$,其满足$\int_0^t E|\Phi(s)|_\lambda^2\mathrm{d}s<\infty$,则可通过下式定义关于$\omega(t)$的$X$值随机积分,

$$\left(\int_0^t\Phi(s)\,\mathrm{d}\omega(s),h\right)=\int_0^t<\Phi^*(s)h,\mathrm{d}\omega(s)>,\ h\in X,$$

式中Φ^*是Φ的伴随算子.

定义1.2[8] 随机过程$\{x(t),t\in[-r,T]\}$($0<T<\infty$)被称为方程(4)的适定解,若

(1) $x(t)$是F_t-适应的且$\int_0^T |x(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty \quad P\text{-}a.s.$;

(2) $x(t)$满足随机积分方程

$$x(t)=S(t)\varphi(0)+\int_0^t S(t-s)f(s,\pi_s x)\mathrm{d}s+\int_0^t S(t-s)g(s,\pi_s x)\mathrm{d}\omega(s),\quad P\text{-}a.s.\quad \forall t\in[0,T].$$

命题 1.1[8]　设 $W_A^{\Phi}(t)=\int_0^t S(t-s)\Phi(s)\mathrm{d}\omega(s)$, $\forall t\in[0,T]$. 对任意的$p>2$,存在常数$c(p,T)>0$使得对任意$T\in(0,\infty)$和随机卷积的适当修正W_A^{Φ},满足

$$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|W_A^{\Phi}(t)|^p \leqslant c(p,T)\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|S(t)\|^p E\int_0^t |\Phi(s)|_{\lambda}^p \mathrm{d}s,$$

若$E\int_0^T |\Phi(s)|_{\lambda}^p \mathrm{d}s<\infty$,则随机过程$\{W_A^{\Phi}(t),t\geqslant 0\}$是连续的.

命题 1.2[8]　若A生成压缩半群,则过程$W_A^{\Phi}(\cdot)$有连续修正且存在常数$\kappa>0$使得

$$E\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|W_A^{\Phi}(t)|^2 \leqslant \kappa E\int_0^t |\Phi(s)|_{\lambda}^p \mathrm{d}s.$$

2　Trotter-Kato逼近体系

随机发展方程(4)适定解的存在唯一性可由命题2.1得到,本文在主要结论定理2.1中证明了当$p\geqslant 2$时Trotter-Kato逼近体系下的适定解收敛于方程(4)的适定解;在此基础上,定理2.2给出关于零阶逼近的结论用以估计逼近的误差.

假设 1　算子$A\in G(M,\alpha)$;令$p\geqslant 2$,对任意的$x,\ y\in X$,函数$f(t,\cdot)$和$g(t,\cdot)$满足利普希茨条件和线性增长条件:

$$|f(t,\pi_t x)-f(t,\pi_t y)|^p \leqslant C_1|x-y|^p,\ C_1>0,$$
$$|g(t,\pi_t x)-g(t,\pi_t y)|_{\lambda}^p \leqslant C_2|x-y|^p,\ C_2>0,$$
$$|f(t,\pi_t x)|^p+|g(t,\pi_t y)|_{\lambda}^p \leqslant C_3(1+|x|^p),\ C_3>0.$$

命题 2.1[9]　若假设1成立,且当$p=2$时$\{S(t),t\geqslant 0\}$是压缩半群,则对任意给定的初值$\varphi\in C([-r,0],L^p(\Omega,X))$以及固定时刻$T\in(0,\infty)$,有

(1) 方程(4)存在唯一的适定解$x\in C([0,T],L^p(\Omega,X))$;

(2) $E\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|^p\}\leqslant K_*(1+E\|\varphi\|_c^p)$,其中$K_*$是依赖于$T$、$M$、$p$、$C_1$、$C_2$和$C_3$的正数.

2.1　适定解的收敛性

现考虑如下随机发展方程

$$\mathrm{d}x_n(t)=[A_n x_n(t)+f(t,\pi_t x_n)]\mathrm{d}t+g(t,\pi_t x_n)\mathrm{d}\omega(t),\quad \forall t>0,\ x_n(t)=\varphi(t),\ t\in[-r,0], \tag{5}$$

式中:A_n, $n=1,2,\cdots$, 是X上有界线性算子强连续半群$\{S_n(t),t\geqslant 0\}$的无穷小生成元.则由命题2.1(1)可知,对每个$n=1,2,\cdots$, 方程(5)有唯一的适定解$x_n\in C([0,T],L^p(\Omega,X))$. 因此,对任意$t\in[0,T]$,$x_n(t)$满足随机积分方程

$$x_n(t)=S_n(t)\varphi(0)+\int_0^t S_n(t-s)f(s,\pi_t s)\mathrm{d}s+\int_0^t S_n(t-s)g(s,\pi_t s)\mathrm{d}\omega(s),\quad P\text{-}a.s..$$

命题 2.2[10]　假设对每个$n=1,2,\cdots$, 都有$A_n\in G(M,\alpha)$,并且

(1) 当$n\to\infty$时,对每个$x\in D$都有$A_n x\to Ax$,其中D是X的一个稠密子集;

(2) 存在一个γ满足$\mathrm{Re}\gamma>\alpha$,使得$(\gamma I-A)D$在X中稠密,则A的闭包$\bar{A}$在$G(M,\alpha)$中,若$S_n(t)$和$S(t)$分别为由A_n和$\bar{A}$生成的强连续半群,则对任意的$t\geqslant 0$,$x\in X$,有

$$\lim_{n\to\infty}S_n(t)x=S(t)x, \tag{6}$$

当t取值于有界区间时,方程(6)中的收敛关于t为一致收敛.

定理 2.1　若假设1与命题2.2中的条件均成立,设$x(t)$和$x_n(t)$分别为方程(4)和方程(5)的适定解,则对每个$T\in(0,\infty)$,当$n\to\infty$时,有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|x_n(t)-x(t)|^p\to 0.$$

证明　首先考虑对任意$t\in[0,T]$,有

$$x_n(t)-x(t)=[S_n(t)-S(t)]\varphi(0)+\int_0^t[S_n(t-s)f(s,\pi_s x_n)-S(t-s)f(s,\pi_s x)]\mathrm{d}s+\int_0^t[S_n(t-s)g(s,\pi_s x_n)-S(t-s)g(s,\pi_s x)]\mathrm{d}\omega(s),\quad P\text{-}a.s.,$$

于是可以得到对任意$t\in[0,T]$,有

$$E|x_n(t)-x(t)|^p\leqslant 5^{p-1}\Big\{|E[S_n(t)-S(t)]\varphi(0)|^p+E\Big|\int_0^t S_n(t-s)[f(s,\pi_s x_n)-f(s,\pi_s x)]\mathrm{d}s\Big|^p+E\Big|\int_0^t[S_n(t-s)-S(t-s)]f(s,\pi_s x)\mathrm{d}s\Big|^p+E\Big|\int_0^t S_n(t-s)[g(s,\pi_s x_n)-g(s,\pi_s x)]\mathrm{d}\omega(s)\Big|^p+E\Big|\int_0^t[S_n(t-s)-S(t-s)]g(s,\pi_s x)\mathrm{d}\omega(s)\Big|^p\Big\},\ P\text{-}a.s.. \tag{7}$$

现在分析方程(7)的右侧各项.由于$\bar{A}\in G(M,\alpha)$且对每个$n=1,2,\cdots$,都有$A_n\in G(M,\alpha)$,则对任意$t\in[0,T]$,有$E|[S_n(t)-S(t)]\varphi_0|^p\leqslant 2^{p-1}M^p e^{p\alpha T}E|\varphi(0)|^p$,且关于$n$及在$[0,T]$上关于$t$一致成立,其中$S(t)$是由$\bar{A}$生成的强连续半群.因此由命题2.2可得对任意$t\in[0,T]$和初值$\varphi\in C([-r,0],L^p(\Omega,X))$,都有当$n\to\infty$时,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|[S_n(t)-S(t)]\varphi_0|^p\to 0, \tag{8}$$

当t在有界区间中时,此极限关于t一致成立.接下来,通过假设1来考虑第2项,

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E\left|\int_0^s S_n(s-r)[f(r,\pi_r x_n)-f(r,\pi_r x)]\,\mathrm{d}r\right|^p\leqslant$$

$$T^{p-1}\int_0^t\left\|S_n(t-r)\right\|^p E|f(r,\pi_r x_n)-f(r,\pi_r x)|^p\,\mathrm{d}r\leqslant$$

$$T^{p-1}M^p e^{p\alpha T}C_1\int_0^t E|x_n(s)-x(s)|^p\,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

再分析第4项,由命题1.1可以得到

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E\left|\int_0^s S_n(s-r)[g(r,\pi_r x_n)-g(r,\pi_r x)]\,\mathrm{d}\omega(r)\right|^p\leqslant$$

$$c(p,T)\int_0^t\left\|S_n(t-r)\right\|^p E|g(r,\pi_r x_n)-g(r,\pi_r x)|^p\,\mathrm{d}r\leqslant$$

$$c(p,T)M^p e^{p\alpha T}C_2\int_0^t E|x_n(s)-x(s)|^p\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

通过方程(8)~(10),方程(7)可简化为

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E|x_n(s)-x(s)|^p\leqslant\beta(n,t)+$$

$$5^{p-1}M^p e^{p\alpha T}[T^{p-1}C_1+c(p,T)C_2]\int_0^t E|x_n(s)-x(s)|^p\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$\beta(n,t)=5^{p-1}\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left\{\left|E[S_n(t)-S(t)]\varphi_0\right|^p+\right.$$

$$E\left|\int_0^s[S_n(s-r)-S(s-r)]f(r,\pi_r x)\,\mathrm{d}r\right|^p+$$

$$\left.E\left|\int_0^s[S_n(s-r)-S(s-r)]g(r,\pi_r x)\,\mathrm{d}\omega(r)\right|^p\right\}. \tag{11}$$

通过贝尔曼-格朗沃尔引理可以得知对任意$t\in[0,T]$,

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E|x_n(s)-x(s)|^p\leqslant$$

$$\beta(n,t)\exp\{5^{p-1}M^p e^{p\alpha T}[T^{p-1}C_1+c(p,T)C_2]t\}.$$

由方程(8)可知当$n\to\infty$时,方程(11)右侧的第1项趋于0.由假设1和命题2.1(2)可以得到

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E\left|\int_0^s[S_n(s-r)-S(s-r)]f(r,\pi_r x)\,\mathrm{d}r\right|^p\leqslant$$

$$T^{p-1}\int_0^t\left\|S_n(t-r)-S(t-r)\right\|^p E|f(r,\pi_r x)|^p\,\mathrm{d}r\leqslant$$

$$(2T)^{p-1}M^p e^{p\alpha T}C_3\int_0^t(1+E|x(r)|)^p\,\mathrm{d}r\leqslant$$

$$2^{p-1}T^p M^p e^{p\alpha T}C_3[1+K_*(1+E\left\|\varphi\right\|_c^p)]<\infty.$$

因此,由方程(8)和勒贝格控制收敛定理可得方程(11)右侧的第2项也趋于0.第3项

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}E\left|\int_0^s[S_n(s-r)-S(s-r)]g(r,\pi_r x)\,\mathrm{d}\omega(r)\right|^p\leqslant$$

$$c(p,T)2^{p-1}M^p e^{p\alpha T}C_3\int_0^t(1+E|x(r)|^p)\mathrm{d}r\leqslant$$

$$c(p,T)2^{p-1}M^p e^{p\alpha T}C_3T[1+K_*(1+E\left\|\varphi\right\|_c^p)]<\infty,$$

由勒贝格控制收敛定理可知这一项也趋于0.综上可得当$n\to\infty$时,$\beta(n,T)\to 0$.定理得证.

2.2 零阶逼近

现考虑零阶逼近问题,即通过确定性发展方程逼近随机发展方程.首先随机发展方程为

$$\mathrm{d}x_\varepsilon(t)=[A_\varepsilon x_\varepsilon(t)+f(t,\pi_t x_\varepsilon)]\,\mathrm{d}t+\varepsilon g(t,\pi_t x_\varepsilon)\mathrm{d}\omega(t),$$
$$\forall t>0,\quad x_\varepsilon(0)=\varphi(t),\quad \forall t\in[-r,0], \tag{12}$$

式中A_ε是X上有界线性算子强连续半群$\{S_\varepsilon(t),t\geqslant 0\}$的无穷小生成元.下面给出确定性发展方程

$$\mathrm{d}\bar{x}(t)=A\bar{x}(t)+f(t,\pi_t\bar{x})\mathrm{d}t,\quad \forall t>0,$$
$$\bar{x}(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in[-r,0]. \tag{13}$$

对任意$t\in[0,T]$,方程(12)和(13)的适定解分别满足如下2个积分方程

$$x_\varepsilon(t)=S_\varepsilon(t)\varphi(0)+\int_0^t S_\varepsilon(t-s)f(s,\pi_s x_\varepsilon)\mathrm{d}s+$$

$$\varepsilon\int_0^t S_\varepsilon(t-s)g(s,\pi_s x_\varepsilon)\mathrm{d}\omega(s),\quad P\text{-}a.s., \tag{14}$$

$$\bar{x}(t)=S(t)\varphi(0)+\int_0^t S(t-s)f(s,\pi_s\bar{x})\mathrm{d}s. \tag{15}$$

于是由命题2.1(1)可知:对每个$\varepsilon>0$,方程(14)有唯一的适定解$x_\varepsilon\in C([0,T],L^p(\Omega,X))$;方程(15)也有唯一的适定解$\bar{x}$,这是当$g\equiv 0$时的一种特殊情况.

为得到关于零阶逼近的结果,先给出如下假设:

假设2 令$A_\varepsilon\in G(M,\alpha)(\varepsilon>0)$且$D(A_\varepsilon)=D(A)$;当$\varepsilon\downarrow 0$,对每个$T\in(0,\infty)$,任意的$t\in[0,T]$,都有$S_\varepsilon(t)\to S(t)$,且在$[0,T]$上关于$t$一致成立.

下面来估计逼近的误差.

定理2.2 若假设1和2均成立,设$x_\varepsilon(t)$和$\bar{x}(t)$

分别为方程(12)和(13)的适定解,则有

$$E|x_\varepsilon(t)-\bar{x}(t)|^p \leqslant \tau(\varepsilon)\phi(t),$$

式中:$\phi(t)$是正指数递增函数;当$\varepsilon \downarrow 0$时,$\tau(\varepsilon)$是正单调递减函数.

证明　首先考虑对任意的$t\in[0,T]$,有

$$x_\varepsilon(t)-\bar{x}(t)=[S_\varepsilon(t)-S(t)]\varphi(0)+\int_0^t S_\varepsilon(t-s)[f(s,\pi_s x_\varepsilon)-f(s,\pi_s\bar{x})]\mathrm{d}s+\int_0^t[S_\varepsilon(t-s)-S(t-s)]f(s,\pi_s\bar{x})\mathrm{d}s+\varepsilon\int_0^t S_\varepsilon(t-s)g(s,\pi_s x_\varepsilon)\mathrm{d}\omega(s),\quad P\text{-}a.s..\tag{16}$$

方程(16)右侧的第1项:由于对任意的$t\in[0,T]$,当$\varepsilon\downarrow 0$时,有$S_\varepsilon(t)\to S(t)$,因此存在$\varepsilon_1>0$, $k_1>0$,使得$E|S_\varepsilon(t)\varphi(0)-S(t)\varphi(0)|^p\leqslant k_1a_1(\varepsilon)$,其中当$\varepsilon_1>\varepsilon\downarrow 0$时,有$0<a_1(\varepsilon)\downarrow 0$;

第2项

$$E\left|\int_0^t S_\varepsilon(t-s)[f(s,\pi_s x_\varepsilon)-f(s,\pi_s\bar{x})]\mathrm{d}s\right|^p\leqslant T^{p-1}M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_1\int_0^t E|x_\varepsilon(s)-\bar{x}(s)|^p\mathrm{d}s;$$

第3项

$$E\left|\int_0^t[S_\varepsilon(t-s)-S(t-s)]f(s,\pi_s\bar{x})\mathrm{d}s\right|^p\leqslant 2^{p-1}M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_3T[1+K_*(1+E\|\varphi\|_c^p)]<\infty.$$

则由勒贝格控制收敛定理可得:当$\varepsilon\downarrow 0$时,有

$$E\left|\int_0^t[S_\varepsilon(t-s)-S(t-s)]f(s,\pi_s\bar{x})\mathrm{d}s\right|^p\to 0.$$

因此存在$\varepsilon_2>0$, $k_2>0$,使得对任意的$t\in[0,T]$,有

$$E\left|\int_0^t[S_\varepsilon(t-s)-S(t-s)]f(s,\pi_s\bar{x})\mathrm{d}s\right|^p<k_2a_2(\varepsilon),$$

在$[0,T]$上关于t一致成立,其中当$\varepsilon_2>\varepsilon\downarrow 0$时,有$0<a_2(\varepsilon)\downarrow 0$.随机积分项

$$\varepsilon\int_0^t S_\varepsilon(t-s)g(s,\pi_s x_\varepsilon)\mathrm{d}\omega(s)=\varepsilon\int_0^t S_\varepsilon(t-s)[g(s,\pi_s x_\varepsilon)-g(s,\pi_s\bar{x})]\mathrm{d}\omega(s)+\varepsilon\int_0^t S_\varepsilon(t-s)g(s,\pi_s\bar{x})\mathrm{d}\omega(s)=I_1+I_2.$$

于是由命题1.1可得,

$$E|I_1|^p\leqslant\varepsilon c(p,T)M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_2\int_0^t E|x_\varepsilon(s)-\bar{x}(s)|^p\mathrm{d}s,$$

$$E|I_2|^p\leqslant\varepsilon c(p,T)M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_3T[1+K_*(1+E\|\varphi\|_c^p)]<\infty.$$

因此存在$\varepsilon_3>0$, $k_3>0$,使得对任意的$t\in[0,T]$,有$E|I_2|^p\leqslant k_3a_3(\varepsilon)$且在$[0,T]$上关于$t$一致成立,其中当$\varepsilon_3>\varepsilon\downarrow 0$时,有$0<a_3(\varepsilon)\downarrow 0$.

设当$0<\varepsilon<\varepsilon_0$时,$\tau(\varepsilon)=5^{p-1}\{k_1a_1(\varepsilon)+k_2a_2(\varepsilon)+k_3a_3(\varepsilon)\}$,其中$\varepsilon_0<\min\{\varepsilon_i,i=1,2,3\}$,则有

$$E|x_\varepsilon(t)-\bar{x}(t)|^p\leqslant\tau(\varepsilon)+5^{p-1}M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}[T^{p-1}C_1+\varepsilon c(p,T)C_2]\int_0^t E|x_\varepsilon(s)-\bar{x}(s)|^p\mathrm{d}s.$$

通过贝尔曼-格朗沃尔引理可得对任意的$t\in[0,T]$,有

$$E|x_\varepsilon(t)-\bar{x}(t)|^p\leqslant\tau(\varepsilon)\phi(t),$$

式中$\phi(t)=\exp\{5^{p-1}\mathrm{e}^{p\alpha T}M^p[T^{p-1}C_1+\varepsilon c(p,T)C_2]t\}$,定理得证.

3　经典极限定理

现考虑随机发展方程

$$\mathrm{d}x_n(t)=[A_nx_n(t)+f_n(t,\pi_t x_n)]\mathrm{d}t+g_n(t,\pi_t x_n)\mathrm{d}\omega(t),\quad \forall t>0,\quad x_n(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in[-r,0],\tag{17}$$

式中每个$n=1,2,\cdots$,f_n和g_n均满足命题2.1(1)和假设1的条件,则对每个$n=1,2,\cdots$,方程(17)均有唯一的适定解$x_n\in C([0,T],L^p(\Omega,X))$,其中$p\geqslant 2$.因此对任意的$t\in[0,T]$,$x_n(t)$满足随机积分方程

$$x_n(t)=S_n(t)\varphi(0)+\int_0^t S_n(t-s)f_n(s,\pi_s x_n)\mathrm{d}s+\int_0^t S_n(t-s)g_n(s,\pi_s x_n)\mathrm{d}\omega(s),\quad P\text{-}a.s..$$

为了接下来的工作,做更进一步的假设:

假设3　对每个$N>0$,任意的$t\in[0,T]$,当$n\to\infty$时,有

$$\sup_{|\pi_t x|\leqslant N}|f_n(t,\pi_t x)-f(t,\pi_t x)|\to 0;$$

$$\sup_{|\pi_t x|\leqslant N}|g_n(t,\pi_t x)-g(t,\pi_t x)|\to 0.$$

定理3.1　若假设1和3与命题2.2的条件均成立,设$x(t)$和$x_n(t)$分别为方程(4)和(17)的适定解,则当$n\to\infty$时,有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|x_n(t)-x(t)|^p\to 0.$$

证明　首先考虑对任意的$t\in[0,T]$,有

$$x_n(t)-x(t)=\psi(t)+\int_0^t S_n(t-s)[f_n(s,\pi_s x_n)-f_n(s,\pi_s x)]\mathrm{d}s+\int_0^t S_n(t-s)[g_n(s,\pi_s x_n)-g_n(s,\pi_s x)]\mathrm{d}\omega(s),P\text{-}a.s.,$$

其中

$$\psi(t)=[S_n(t)-S(t)]\varphi(0)+$$

$$\int_0^t S_n(t-s)[f_n(s,\pi_s x)-f(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t [S_n(t-s)-S(t-s)]f(s,\pi_s x)\,\mathrm{d}s+$$
$$\int_0^t S_n(t-s)[g_n(s,\pi_s x)-g(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}\omega(s)+$$
$$\int_0^t [S_n(t-s)-S(t-s)]g(s,\pi_s x)\,\mathrm{d}\omega(s).$$

由命题1.1可得

$$E|x_n(t)-x(t)|^p \leqslant 3^{p-1}\{E|\psi(t)|^p+$$
$$T^{p-1}M^p \mathrm{e}^{p\alpha T}C_1\int_0^t E|x_n(s)-x(s)|^p\,\mathrm{d}s+$$
$$c(p,T)M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_2\int_0^t E|x_n(s)-x(s)|^p\,\mathrm{d}s\}\leqslant$$
$$3^{p-1}E|\psi(t)|^p+L\int_0^t E|x_n(s)-x(s)|^p\,\mathrm{d}s,$$

式中 $L=3^{p-1}M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}[T^{p-1}C_1+c(p,T)C_2]$. 因此由文献[11]中引理1可知

$$E|x_n(t)-x(t)|^p \leqslant 3^{p-1}E|\psi(t)|^p+$$
$$L\int_0^t \mathrm{e}^{L(t-s)}E|\psi(t)|^p\,\mathrm{d}s.$$

那么只需证明当 $n\to\infty$ 时, $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}E|\psi(t)|^p\to 0$ 即可得到所求. 其中 $\psi(t)$ 的首项 $\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T}E|S_n(t)\varphi(0)-S(t)\varphi(0)|^p\to 0$ 在方程(8)中已经说明过了,那么接下来只要证明 $\psi(t)$ 中剩余各项也都趋于0即可. 首先考虑第2项

$$E\left|\int_0^t S_n(t-s)[f_n(s,\pi_s x)-f(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}s\right|^p\leqslant$$
$$2^{p-1}T^pM^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_3[1+K_*(1+E\|\varphi\|_c^p)]<\infty.$$

因此由假设3和勒贝格控制收敛定理可得:当 $n\to\infty$ 时,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E\left|\int_0^t S_n(t-s)[f_n(s,\pi_s x)-f(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}s\right|^p\to 0.$$

同理,由假设1、命题2.2、方程(8)和勒贝格控制收敛定理可得:当 $n\to\infty$ 时,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E\left|\int_0^t S_n(t-s)[f_n(s,\pi_s x)-f(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}s\right|^p\to 0.$$

接着再分析2个随机积分项;由命题1.1和2.1(2)可得

$$E\left|\int_0^t S_n(t-s)[g_n(s,\pi_s x)-g(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}\omega(s)\right|^p\leqslant$$
$$2^{p-1}c(p,T)M^p\mathrm{e}^{p\alpha T}C_3T[1+K_*(1+E\|\varphi\|_c^p)]<\infty.$$

于是由假设3和控制收敛定理可得,当 $n\to\infty$ 时,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E\left|\int_0^t S_n(t-s)[g_n(s,\pi_s x)-g(s,\pi_s x)]\,\mathrm{d}\omega(s)\right|^p\to 0.$$

最后根据方程(8)以及相应假设条件同理可知,当 $n\to\infty$ 时,

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E\left|\int_0^t [S_n(t-s)-S(t-s)]g(s,\pi_s x)\,\mathrm{d}\omega(s)\right|^p\to 0.$$

定理得证.

若方程(17)中的参数依赖于通过一组数字 G_1 变化的参数 θ,则可得到随机发展方程

$$\mathrm{d}x_\theta(t)=[A_\theta x_\theta(t)+f_\theta(t,\pi_t x_\theta)]\,\mathrm{d}t+g_\theta(t,\pi_t x_\theta)\mathrm{d}\omega(t),$$
$$\forall t>0,\quad x_\theta(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in[-r,0],\quad (18)$$

其中 A_θ 是 X 上有界线性算子强连续半群 $\{S_\theta(t),t\geqslant 0\}$ 的无穷小生成元.

若 f_θ 和 g_θ 均满足对每个 $N>0$,当 $\theta\to\theta_0$ 时,有

$$\sup_{|\pi_t x|\leqslant N}|f_\theta(t,\pi_t x)-f_{\theta_0}(t,\pi_t x)|\to 0;$$
$$\sup_{|\pi_t x|\leqslant N}|g_\theta(t,\pi_t x)-g_{\theta_0}(t,\pi_t x)|\to 0.$$

并且 $A_\theta,\ A_{\theta_0}\in G(M,\alpha),\ \theta\in G_1,\ D(A_\theta)=D(A_{\theta_0})$,对任意的 $t\in[0,T]$,当 $\theta\to\theta_0$ 时,有 $S_\theta(t)\to S_{\theta_0}(t)$ 且在 $[0,T]$ 上关于 t 一致成立,则可得到下面的推论.

推论3.1 若对每个 $\theta\in G_1$ 都有 A_θ、f_θ、g_θ 满足命题2.1的假设条件,则方程(18)有唯一的适定解 $x_\theta(t)$ 满足对每个 $T\in(0,\infty)$,当 $\theta\to\theta_0$ 时,有

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}E|x_\theta(t)-x_{\theta_0}(t)|^p\to 0.$$

证明 该推论的证明过程可参考定理3.1.

4 应 用

首先,考虑如下带有有限时滞 r_1 和 r_2($r>r_i\geqslant 0,i=1,2$)的半线性随机热方程

$$\mathrm{d}z(t,x)=[\frac{\partial^2}{\partial x^2}z(t,x)+\alpha_1\int_{-r_1}^0 z(t+u,x)\,\mathrm{d}u]\,\mathrm{d}t+$$
$$\alpha_2 z(t-r_2,x)\mathrm{d}\beta(t),\ t>0,\ \alpha_i\geqslant 0,\ i=1,2;$$
$$z(t,0)=z(t,\pi)=0,\ t>0;$$
$$z(s,x)=\varphi(s,x),\ \varphi(\cdot,x)\in C([-r,0],\mathbf{R}),$$
$$\varphi(s,\cdot)\in L^2[0,\pi],\ s\in[-r,0],\ x\in[0,\pi];\quad (19)$$

式中 $\beta(t)$ 是标准维纳过程且有 $E\|\varphi\|_c^2<\infty$.

令 $X=L^2[0,\pi]$, $Y=\mathbf{R}$. 定义算子 $A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}:X\to X$,其定义域为

$$D(A)=\Big\{w\in L^2[0,\pi],\frac{\partial w}{\partial x}\text{是绝对连续的},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \in L^2[0,\pi], w(0) = w(\pi) = 0\Big\}.$$

则有

$$Aw = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (w, w_n) w_n, w \in D(A),$$

式中$w_n = \sqrt{2/\pi}\sin nx, n = 1, 2, \cdots$,是$A$的特征向量的标准正交集,从而可以得到$A$是$X$中强连续半群$\{S(t), t \geqslant 0\}$的无穷小生成元,有

$$S(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t)(w, w_n) w_n, w \in X,$$

且满足$\|S(t)\| \leqslant \exp(-\pi^2 t), t \geqslant 0$,由此可知$\{S(t), t \geqslant 0\}$是压缩半群.

因此,定义

$$f(t, \pi_t z) = \alpha_1 \int_{-r_1}^{0} z(t+u, x)\mathrm{d}u,$$

和

$$g(t, \pi_t z) = \alpha_2 z(t - r_2, x).$$

可得

$$\left|f(t, \pi_t z)\right|^2 = \left|\alpha_1 \int_{-r_1}^{0} z(t+u, x)\mathrm{d}u\right|^2 \leqslant (\alpha_1 r_1)^2 |z|_t^2,$$

$$P\text{-}a.s.,$$

这证明了$f: \mathbf{R}^+ \times X \to X$.类似地,也可证明$g: \mathbf{R}^+ \times X \to L(Y, X)$.因此方程(19)中的$A$、$f$和$g$均符合方程(4)中所给出的定义,即方程(19)可以看作是方程(4)的抽象形式.

这表明在一定的假设条件下,本文前面所给出的在Trotter-Kato逼近体系下适定解的收敛性,零阶逼近以及经典极限定理等结论对方程(19)都是同样成立.

参 考 文 献

[1] ICHIKAWA A. Stability of semilinear stochastic evolution equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1982, 90(1): 12-44.

[2] GOVINDAN T E, AHMED N U. Robust stabilization with a general decay of mild solutions of stochastic evolution equations [J]. Statistics and Probability Letters, 2013, 83(1): 115-122.

[3] AHMED N U, DING X. A semilinear McKean-Vlasov stochastic evolution equation in Hilbert space [J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1995, 60(1): 65-85.

[4] GOVINDAN T E, AHMED N U. On Yosida approximations of McKean-Vlasov type stochastic evolution equations [J]. Stochastic Analysis and Applications, 2015, 33(3): 383-398.

[5] GOVINDAN T E. Trotter-Kato approximations of semilinear stochastic evolution equations [J]. Boletin de la Sociedadmatematica Mexicana, 2006, 12: 109-120.

[6] GOVINDAN T E. On Trotter-Kato approximations of semilinear stochastic evolution equations in infinite dimensions [J]. Statistics and Probability Letters, 2015, 96: 299-306.

[7] GOVINDAN T E. Trotter-Kato approximations of McKean-Vlasov type stochastic evolution equations in Hilbert spaces [J]. Dynamic Systems and Applications, 2018, 27: 565-580.

[8] DA PRATO G, ZABCZYK J. Stochastic differential equations in infinite dimensions [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[9] TANIGUCHI T. Almost sure exponential stability for stochastic partial functional differential equations [J]. Stochastic Analysis and Applications, 1998, 16(5): 965-975.

[10] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[11] GIKHMAN I I, SKOROKHOD A V. Stochastic differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1972.

(责任编辑:马田田)