DOI：10.19789/j.1004-9398.2023.01.001
文献引用：樊亚飞，张玉琴．可平面图的DP-3-染色［J］．首都师范大学学报（自然科学版），2023，44（1）：1-10. FAN Y F，ZHANG Y Q. DP-3-coloring of some planar graphs［J］. Journal of Capital Normal University（Natural Science Edition），2023，44（1）：1-10.

可平面图的DP-3-染色*

樊亚飞**，张玉琴
（天津大学数学学院，天津　300354）

摘要：Dvořák和Postle首次提出了DP-染色，该染色是列表染色的推广。本文证明了每个无{4, 5, 7, 10}-圈的可平面图和每个无{4, 5, 8, 10}-圈的可平面图都是DP-3-可染的，对这些可平面图的3-可选性进行了推广。

关键词：列表染色；DP-染色；可平面图；权转移规则
中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A

DP-3-coloring of some planar graphs*

FAN Yafei**，ZHANG Yuqin
（School of Mathematics，Tianjin University，Tianjin　300354）

Abstract：DP-coloring is a generalization of list coloring，which was introduced by Dvořák and Postle. In this paper，we show that every planar graph without cycles of length $\{4,5,7,10\}$ and every planar graph without cycles of length $\{4,5,8,10\}$ are DP-3-colorable，which extend the corresponding results on 3-choosability.

Keywords：list coloring；DP-coloring；planar graph；discharging rules
CLC：O157.5　　**DC**：A

0　引　言

本文所涉及的图都是无向的简单图。令G是一个平面图，其顶点集为$V(G)$，边集为$E(G)$，面集为$F(G)$。图G的最大度和最小度分别表示为$\Delta(G)$和$\delta(G)$。如果两个面有一个公共边，则称这两个面相邻。若两个相邻面只有两个公共顶点，则称为正规相邻；否则，称为非正规相邻。对于$v\in V(G)$，顶点的度$d(v)$表示v关联的边数。对于$f\in F(G)$，面的度$d(f)$表示f关联的边数。用$b(f)$表示f的边界回路，且若$v_1, v_2, \cdots, v_k$是$b(f)$上的顶点，则记$f=[v_1v_2\cdots v_k]$。如果$b(f)$形成一个圈，则称f为简单面；否则，称f为非简单面。若顶点v的度为k（至少为k，至多为k），则称v为k-顶点（k^--顶点，k^+-顶点）。若面f的度为k（至少为k，至多为k），则称f为k-面（k^--面，k^+-面）。若$f=[v_1v_2\cdots v_k]$，$v_i=d_i(i=1,2,\cdots,k)$，则称f为$(d_1, d_2, \cdots, d_k)$-面。若$e=v_1v_2$，$v_i=d_i(i=1,2)$，则称e为(d_1, d_2)-边。

G的真k-着色是一个映射$c: V(G)\to[k]$使得对任意的边$uv\in E(G)$，有$c(u)\neq c(v)$，其中$[k]=\{1, 2, \cdots, k\}$。使得G有一个真k-着色的最小整数k称为G的染色数，并记为$\chi(G)$。

Vizing[1]和Erdős等[2]分别提出了列表染色。G的一个列表分配是一个函数$L: V(G)\to\mathbf{N}$，对每个

收稿日期：2022-02-09
* 国家自然科学基金项目（11971346）
** 通信作者：18230403021@163.com

顶点$v \in V(G)$分配一个颜色列表$L(v)$。如果每个顶点的颜色列表的大小为k,则称L是一个k-列表分配。G的一个L-着色是一个函数ϕ: $V(G) \to \bigcup_{v \in V(G)} L(v)$使得对每个顶点$v \in V(G)$,有$\phi(v) \in L(v)$,且对每条边$uv \in E(G)$,有$\phi(u) \neq \phi(v)$。如果$G$对每个$k$-列表分配$L$都有一个$L$-着色,则称$G$是$k$-可选的。使得$G$是$k$-可选的最小整数$k$称为其列表染色数,记为$\chi_\ell(G)$。如果对所有的顶点$v \in V(G)$,令$L(v) = [k]$,则$L$-染色就是一个真$k$-着色,因此$\chi(G) \leqslant \chi_\ell(G)$。Thomassen[3-4]证明了每个可平面图是5-可选的且每个围长至少为5的可平面图是3-可选的;Voigt课题组[5-6]证明了存在非4-可选的平面图和非3-可选的围长为4的平面图,使得平面图是3-可选的充分条件被广泛研究,Dvořák和Postle [7]提出了DP-染色的概念,该染色是列表染色的推广。

定义1[7] 令G是一个简单图,L是G的一个列表分配,对每个顶点$u \in V(G)$,令$L_u = \{u\} \times L(u)$。对每条边$uv \in E(G)$,令M_{uv}是集合L_u和L_v之间的匹配(可能为空)且令$M_L = \{M_{uv}: uv \in E(G)\}$,并称$M_L$为匹配分配。令$H$是满足下列条件的图:

(a)$V(H) = \bigcup_{u \in V(G)} L_u$;

(b)对每个顶点$u \in V(G)$,集合L_u形成一个团;

(c)如果$uv \in E(G)$,则L_u和L_v之间的边是M_{uv};

(d)如果$uv \notin E(G)$,则L_u和L_v之间不存在边。

假设$f: V(G) \to \mathbf{N}$是一映射,若对每个顶点$u \in V(G)$,$|L(u)| = f(u)$,则称序对(H, L)是G的一个f-覆盖。如果H包含一个大小为$|V(G)|$的独立集,则G有一个M_L-着色。如果对每个k-列表分配L和每个匹配分配M_L,G都有一个M_L-着色,则称G是DP-k-可染的。使得G是DP-k-可染的最小整数k称为DP-染色数,记为$\chi_{DP}(G)$。如果定义H的边是对每个$uv \in E(G)$,恰匹配L_u和L_v中相同的颜色,则G有一个M_L-着色当且仅当G是L-可染的,因此$\chi_\ell(G) \leqslant \chi_{DP}(G)$。此外,$\chi_{DP}(G) - \chi_\ell(G)$可以任意大。特别地,Bernshteyn[8]证明了平均度为d的二部图的DP-染色数为$\Omega(\frac{d}{\log d})$,然而Alon[9]证明了$\chi_\ell(K_{d,d}) = O(\log d)$。

近几年,图的DP-染色数的概念引起了广泛的关注。例如,Bernshteyn和Kostochka[10]证明了DP-临界可染图的边数的最小值;Bernshteyn等[11]提出了多重图的DP-染色并且刻画了非DP-度-可染的多重图;Bernshteyn等[12]证明了对于n-顶点图G,当G的染色数接近于n时,该图的DP-染色数等于其染色数;Dvořák和Postle[7]证明了每个平面图都是DP-5-可染的且每个无3-圈和4-圈的平面图是DP-3-可染的。在文献[13-15]中给出一些使得可平面图是DP-4-可染的充分条件;在文献[16-18]中给出一些使得可平面图是DP-3-可染的充分条件。下列定理是使得可平面图是3-可选的充分条件。

定理1 如果可平面图G满足下列条件之一,则G是3-可选的。

(1)G不包含$\{4, 5, 7, 10\}$-圈[19];

(2)G不包含$\{4, 5, 8, 10\}$-圈[20]。

本文将此定理进行了推广,即证明了下列定理。

定理2 如果可平面图G满足下列条件之一,则G是DP-3-可染的。

(1)G不包含$\{4, 5, 7, 10\}$-圈;

(2)G不包含$\{4, 5, 8, 10\}$-圈。

1 极小非DP-k-可染图的性质

如果图G不是DP-k-可染的,但其任意真子图是DP-k-可染的,则称图G是极小非DP-k-可染的。

引理1[9] 如果图G是极小非DP-k-可染的,则$\delta(G) \geqslant k$。

引理2[11] 令$k \geqslant 3$且H是G的一个子图,假设$G - H$有一个DP-k-染色。如果H的顶点可以排序为$v_1, v_2, \cdots, v_l$使得下列条件成立:

(1)$v_1v_l \in E(G)$且$|A(v_1)| > |A(v_l)| \geqslant 1$,其中$A(v)$表示在$G - H$完成染色后,$v$的可用颜色所构成的集合;

(2)$d(v_l) \leqslant k$且v_l在$G - H$中至少有1个邻点;

(3)对任意的$2 \leqslant i \leqslant l-1$,$v_i$在图$G[\{v_1, \cdots, v_{i-1}\}] \cup (G - H)$中至多有$k - 1$个邻点,则$G - H$的染色可以扩展为$G$的DP-$k$-染色。

令v是一个3-顶点,若v恰关联1个3-面,则称v是poor-3-顶点;若v恰关联1个4-面,则称v是semi-rich-3-顶点;若v不关联任何4^--面,则称v是rich-3-顶点。令v是一个4-顶点,若v恰关联2个3-面,则称v是weak-4-顶点;若v恰关联1个3-面,则称v是semi-weak-4-顶点;若v不关联任何3-面,则称v是strong-4-顶点。如果k-面f关联的顶点均为3-顶点,

则称f为light-k-面;否则,称f为非light-k-面。如果k-面f恰关联1个4^+-顶点且其余顶点均为3-顶点,则称f为minimal-k-面。

引理3 如果G是极小非DP-3-可染的平面图且f是一个light-面,则f不相邻于light-面g。

证明 令$d(f)=k, d(g)=l, f=[v_1v_2\cdots v_k]$且$g=[v_1v_2w_3\cdots w_l]$使得$v_1v_2$是$f$和$g$的公共边,且$f$和$g$所关联的顶点都是3-顶点。将$f$和$g$的顶点排序为$v_1, w_l, \cdots, w_3, v_2, v_3, \cdots, v_k$。令$H$是上述顶点所导出的子图,则根据$G$的极小性可知,$G-H$存在DP-3-染色。再由引理2可知,$G-H$的每个DP-3-染色都可以扩展为$G$的DP-3-染色,这与$G$是非DP-3-可染的相矛盾。

2 无{4, 5, 7, 10}-圈的可平面图的DP-3-可染性

定理3 每个无{4, 5, 7, 10}-圈的可平面图是DP-3-可染的。

首先假设该定理不成立,则可令G是最小反例,即G是极小非DP-3-可染的且不含{4, 5, 7, 10}-圈。由引理1可知$\delta(G)\geqslant 3$。再结合图G中圈的限制可以得到下列引理所示的图G的可约构型。

引理4 图G满足下列性质:

(1)3-面不能相邻于3-面;

(2)3-面不能相邻于6-面;

(3)3-面不能相邻于9-面;

(4)3-面只能正规相邻于8-面,且每个8-面至多相邻于1个3-面。

证明 (1)如果3-面相邻于1个3-面,则将产生一个4-圈,这与G不含4-圈相矛盾。

(2)令f_1是一个6-面,如果f_1的边界是由2个3-圈构成的,即$f_1=[v_1v_2v_3v_4v_5v_3]$,则由(1)可知f_1不能相邻于任何的3-面。因此不妨假设$f_1=[v_1v_2v_3v_4v_5v_6]$且$f_2=[v_1v_2w_{12}]$是1个3-面。令$S=\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$。若$w_{12}\notin S$,则$v_1w_{12}v_2v_3v_4v_5v_6$是1个7-圈,矛盾。显然,$w_{12}\neq v_3$,否则G包含5-圈$v_1v_3v_4v_5v_6$,下面证明$w_{12}\neq v_4$。如果$w_{12}=v_4$,则G包含4-圈$v_1v_6v_5v_4$,矛盾。根据对称性易知$w_{12}\notin\{v_5, v_6\}$。

(3)令f_1是一个9-面,如果f_1的边界是由1个6-圈和1个3-圈或3个3-圈构成的,则由(1)和(2)可知f_1不能相邻于任何的3-面。不妨假设$f_1=[v_1v_2\cdots v_9]$且假设$f_2=[v_1v_2w_{12}]$是1个3-面,令$S=\{v_3, v_4, \cdots, v_9\}$,若$w_{12}\notin S$,则$v_1w_{12}v_2v_3\cdots v_9$是1个10-圈,矛盾。首先,证明$w_{12}\neq v_3$,否则$d(v_2)=2$。又因为$G$不含4-圈和5-圈,所以$w_{12}\neq v_4, w_{12}\neq v_5, w_{12}\neq v_6$。综上可知$w_{12}\notin\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$。由对称性可知$w_{12}\notin\{v_7, v_8, v_9\}$。

(4)令f_1是一个8-面,因为G不含4-圈和5-圈,所以可假设且假设$f_1=[v_1v_2\cdots v_8]$且假设$f_2=[v_1v_2w_{12}]$是一个3-面。令$S=\{v_3, v_4, \cdots, v_8\}$,若$w_{12}=v_3$,则$d(v_2)=2$,矛盾。又因为$G$不含4-圈和5-圈,所以$w_{12}\neq v_4, w_{12}\neq v_5$。由对称性可知$w_{12}\notin\{v_6, v_7, v_8\}$。因此,$f_1$不能非正规相邻于$f_2$。

假设存在另1个3-面$f_3=[v_1v_8x]$正规相邻于f_1。若$x\neq w_{12}$,则将产生10-圈,这与G不含10-圈相矛盾;若$x=w_{12}$,则G包含4-圈$v_8v_1v_2w_{12}$,矛盾。当f_3与f_1相邻于边$v_iv_j(v_iv_j\in\{v_7v_8, v_6v_7, v_5v_6, v_4v_5, v_3v_4, v_2v_3\})$时,仍然可以得到矛盾。因此每个8-面至多相邻于1个3-面。

现在对图G的顶点和面赋予初始权函数。对任意的$v\in V(G)$,令$\mathrm{ch}(v)=d(v)-6$;对任意的$f\in F(G)$,令$\mathrm{ch}(f)=2d(f)-6$,因此,根据欧拉公式可知$\sum_{v\in V(G)}(d(v)-6)+\sum_{f\in F(G)}(2d(f)-6)=-12$,即总的权和为$-12$。下面将设置适当的权转移规则,且用$\mathrm{ch}^*$表示最终权函数使得对任意的$x\in V(G)\cup F(G)$,有$\mathrm{ch}^*(x)\geqslant 0$。因此,$0\leqslant\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}(x)=\sum_{x\in V(G)\cup F(G)}\mathrm{ch}^*(x)=-12$,矛盾。

权转移规则如下所示:

R1 令v是一个3-顶点,

R1.1 若v是poor-3-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得$\frac{3}{2}$。

R1.2 若v是rich-3-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得1。

R2 令v是一个4-顶点,

R2.1 若v是weak-4-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得1。

R2.2 若v是semi-weak-4-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得$\frac{3}{4}$,其中6^+-面相邻于v所关联的3-面;且从其他的关联的6^+-面中得$\frac{1}{2}$。

R2.3 若v是strong-4-顶点,则v从每个关联的

6^+-面中各得$\frac{1}{2}$。

R3 令v是一个5-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得$\frac{1}{3}$。

为了完成定理的证明,现证明每个顶点以及每个面的最终权值非负。

下面验证对任意的$v \in V(G)$,有$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 0$。

令v是G中的任意顶点,由引理1可知$d(v) \geqslant 3$。

若$d(v) \geqslant 6$,则由于权转移规则中未涉及6^+-顶点可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) = d(v) - 6 \geqslant 0$。

若$d(v) = 5$,则由引理4(1)可知v至多关联2个3-面,即v至少关联3个6^+-面。因此,由R3可知$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant \mathrm{ch}(v) + \frac{1}{3} \times 3 = 0$。

若$d(v) = 4$,则由引理4(1)可知v至多关联2个3-面。如果v恰关联2个3-面,则v是weak-4-顶点且由R2.1可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + 1 \times 2 = 0$;如果$v$恰关联1个3-面,则$v$是semi-weak-4-顶点且由R2.2可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + \frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{2} = 0$;如果$v$不关联任何的3-面,则$v$是strong-4-顶点且由R2.3可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + \frac{1}{2} \times 4 = 0$。

若$d(v) = 3$,则由引理4(1)可知v至多关联1个3-面。如果v是poor-3-顶点,则由R1.1可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + \frac{3}{2} \times 2 = 0$;如果$v$是rich-3-顶点,则由R1.2可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + 1 \times 3 = 0$。

现只需验证对任意的$f \in F(G)$,有$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$。

令f是G中的任意面,因为G是简单图,所以$d(f) \geqslant 3$。若f是3-面,由于权转移规则中未涉及到3-面,所以$\mathrm{ch}^*(f) = \mathrm{ch}(f) = 0$。

若$d(f) = 6$,则由引理4(2)可知f不关联任何的poor-3-顶点,所以$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - 1 \times 6 = 0$。

若$d(f) = 8$,则由引理4(4)可知f至多关联2个poor-3-顶点。因此,$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - \frac{3}{2} \times 2 - 1 \times 6 = 1 > 0$。

若$d(f) = 9$,则由引理4(3)可知f不关联任何的poor-3-顶点。因此,$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - 1 \times 9 = 3 > 0$。

若$d(f) = 11$,则需要考虑2种情形:若f至少相邻于6个3-面,则由引理4(1)可知f至少关联1个4^+-顶点,因此,$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - \frac{3}{2} \times 10 - 1 = 0$;若$f$至多相邻于5个3-面,则$f$至多关联10个poor-3-顶点,所以$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - \frac{3}{2} \times 10 - 1 = 0$。

若$d(f) \geqslant 12$,则$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - \frac{3}{2} \times d(f) = \frac{d(f) - 12}{2} \geqslant 0$。

3 无{4, 5, 8, 10}-圈的可平面图的DP-3-可染性

定理4 每个无{4, 5, 8, 10}-圈的可平面图是DP-3-可染的。

首先假设该定理不成立,则可令G是最小反例,即G是极小非DP-3-可染的且不含{4, 5, 8, 10}-圈。由引理1可知$\delta(G) \geqslant 3$。再结合图G中圈的限制可得下列引理所示的图G的可约构型。

引理5 图G满足下列性质:

(1)3-面不能相邻于3-面;

(2)3-面不能相邻于7-面;

(3)3-面只能非正规相邻于10-面,且每个10-面至多相邻1个3-面;

(4)3-面只能正规相邻于6-面,且每个6-面至多相邻于1个3-面。

证明 (1)如果3-面相邻于1个3-面,则将产生1个4-圈,这与G不含4-圈相矛盾。

(2)令f_1是一个7-面,由G不含4-圈可假设$f_1 = [v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7]$且$f_2 = [v_1v_2w_{12}]$是一个3-面。令$S = \{v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$,若$w_{12} \notin S$,则$v_1w_{12}v_2v_3v_4v_5v_6v_7$是1个8-圈,矛盾。显然,$w_{12} \neq v_3$,否则$d(v_2) = 2$,这与$\delta(G) \geqslant 3$矛盾。下面证明$w_{12} \neq v_4$。如果$w_{12} = v_4$,则$G$包含4-圈$v_1v_2v_3v_4$,矛盾。根据对称性易知$w_{12} \notin \{v_5, v_6, v_7\}$。

(3)令f_1是一个10-面,由G不含{4, 5, 10}-圈可知f_1的边界是由1个7-圈和1个3-圈构成,则可假设$f_1 = [v_1v_2\cdots v_7v_1v_8v_9]$。由(1)和(2)可知$f_1$只能相邻于3-面$g = [v_7v_1v_2]$。

(4)令f_1是一个6-面,如果f_1的边界是由2个3-圈构成的,则由(1)可知f_1不与任何3-面相邻。因此,可假设$f_1 = [v_1v_2\cdots v_6]$且$f_2 = [v_1v_2w_{12}]$是一个3-面。令$S = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$,若$w_{12} = v_3$,则$G$包含5-圈$v_1v_3v_4v_5v_6$,矛盾。下面证明$w_{12} \neq v_4$。如果$w_{12} = v_4$,则$G$包含4-圈$v_1v_2v_3v_4$,矛盾。由对称性可知$w_{12} \notin \{v_5, v_6\}$。因此,$f_1$正规相邻于$f_2$。

假设存在另一个3-面$f_3=[v_1v_6x]$正规相邻于f_1。若$x\neq w_{12}$,则将产生8-圈,这与G不含8-圈相矛盾;若$x=w_{12}$,则G包含4-圈$v_6v_1v_2w_{12}$,矛盾。由对称性可知,当f_3与f_1相邻于边$v_iv_{i+1}(i\in\{2,3,4,5\})$时,仍然可以得到矛盾。因此每个6-面至多相邻于1个3-面。

引理6 任意2个简单6-面不能相邻。

证明 假设$f_1=[v_1v_2\cdots v_6]$相邻于$f_2=[v_1v_2u_3\cdots u_6]$。如果$f_1$正规相邻于$f_2$,则$G$包含一个10-圈。因此,假设这2个面非正规相邻。显然,$v_3\neq u_3$,否则$d(v_2)=2$。因为G不含4-圈和5-圈,所以任意的6-圈都没有弦。所以$u_3\notin\{v_3,v_4,v_5,v_6\}$。由对称性可知$u_6\notin\{v_3,v_4,v_5,v_6\}$,$v_6\notin\{u_3,u_4,u_5,u_6\}$且$v_3\notin\{u_3,u_4,u_5,u_6\}$。下证$v_4\neq u_4$且$v_4\neq u_5$,否则,图$G$包含一个4-圈$v_2v_3u_4u_3$或一个5-圈$v_2v_3v_4u_4u_3$。由对称性可知$v_5\notin\{u_4,u_5\}$。因此,$f_1$不能相邻于$f_2$。

引理7 简单9-面不能相邻于3-面。

证明 假设$f_1=[v_1v_2\cdots v_9]$是一个简单9-面且令$f_2=[v_1v_2w_{12}]$,$S=\{v_4,v_5,\cdots,v_8\}$。如果$w_{12}=v_3$或$w_{12}=v_9$,则$d(v_2)=2$或$d(v_1)=2$,矛盾。因为G不含{4,5,8}-圈,所以任意的9-圈都没有弦。因此,$w_{12}\notin S$,即任意的简单9-面不能与3-面相邻。

引理8 令f_1和f_2都是G中的(3,3,3,3,3,4)-面且f_1与(3,3,4)-面f_3相邻于某(3,4)-边,则f_2不能与f_3相邻于另一(3,4)-边。

证明 不妨假设$f_1=[v_1v_2v_3v_4v_5v_6]$,$f_2=[v_1u_3u_4u_5u_6u_7]$且$f_3=[v_1v_2u_3]$。将f_1,f_2和f_3所关联的顶点进行排序,序列为$v_1,u_7,u_6,u_5,u_4,u_3,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6$。令$H$是上述序列所导出的子图。根据$G$的极小性可知$G-H$是DP-3-可染的。由引理2可知$G-H$的每个DP-3-染色都可以扩展为$G$的DP-3-染色,矛盾。

引理9 若f_1是light-11-面且与(3,3,4)-面f_2和(3,3,3,3,3,4)-面f_3都相邻,则f_3不能与f_2相邻于(3,4)-边。

证明 不妨假设$f_1=[v_1v_2\cdots v_{11}]$,$f_2=[v_1v_2u_3]$且$f_3=[v_2v_3w_1w_2w_3u_3]$。将$f_1$,$f_2$和$f_3$所关联的顶点进行排序,序列为$v_1,u_3,v_2,w_3,w_2,w_1,v_3,v_4,\cdots,v_{11}$。令$H$是上述序列所导出的子图。根据$G$的极小性可知$G-H$是DP-3-可染的,由引理2可知$G-H$的每个DP-3-染色都可以扩展为$G$的DP-3-染色,矛盾。

现在对图G的顶点和面赋予初始权函数。对任意的$v\in V(G)$,令$\mathrm{ch}(v)=d(v)-4$;对任意的$f\in F(G)$,令$\mathrm{ch}(f)=d(f)-4$。因此,根据欧拉公式可得总权和为-12。下面将设置适当的权转移规则,且用ch^*表示最终权函数使得对任意的$x\in V(G)\cup F(G)$,有$\mathrm{ch}^*(x)\geqslant 0$。因此可得矛盾。

若light-6-面通过(3,3)-边与一个3-面相邻,则称该6-面是worst-6-面;若minimal-6-面通过(3,3)-边与一个3-面相邻,则称该6-面是worse-6-面;若minimal-6-面通过$(3,4^+)$-边与一个3-面相邻,则称该6-面是bad-6-面;若6-面恰关联2个4^+-顶点且通过$(4^+,4^+)$-边与一个3-面相邻,则称该6-面是semi-bad-6-面;其余的6-面称为good-6-面。

权转移规则如下所示。

R1 令v是一个3-顶点,

R1.1 若v是poor-3-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得$\frac{1}{2}$。

R1.2 若v是rich-3-顶点,则v从每个关联的6^+-面中各得$\frac{1}{3}$。

R2 令f是一个3-面,则f从每个关联的5^+-顶点v中各得$\frac{d(v)-4}{t(v)}$,其中$t(v)$表示v所关联的3-面的个数。

R3 令f是一个6-面,

R3.1 若f是worst-6-面,则f从相邻的11^+-面中得$\frac{1}{6}$,其中11^+-面相邻于该6-面所相邻的3-面。

R3.2 若f是bad-6-面,则f给每个相邻的3-面各$\frac{1}{6}$。

R3.3 若f是semi-bad-6-面,则f给每个相邻的3-面各$\frac{2}{3}$。

R3.4 若f是good-6-面,则f给每个相邻的3-面各$\frac{1}{3}$。

R4 令f是一个9^+-面且g是相邻于f的3-面,

R4.1 若g至少关联1个5^+-顶点,则当g相邻于worst或worse-6-面时,f给$g\frac{1}{4}$;否则,f给$g\frac{1}{6}$。

R4.2 若g不关联任何的5^+-顶点,则当g相邻于worst、worse或bad-6-面时,f给$g\frac{1}{2}$;当g相邻于semi-bad-6-面时,f给$g\frac{1}{6}$;否则,f给$g\frac{1}{3}$。

为了完成定理的证明,现证明每个顶点以及每个面的最终权值非负。

下面验证对任意的$v \in V(G)$,有$\mathrm{ch}^*(v) \geqslant 0$。

令v是G中的任意顶点,由引理1可知$d(v) \geqslant 3$。

若$d(v) \geqslant 5$,则由R2可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) - \frac{d(v)-4}{t(v)} \times t(v) = 0$。

若$d(v) = 4$,由于权转移规则中未涉及到4-顶点,所以$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) = d(v) - 4 = 0$。

若$d(v) = 3$,则需考虑2种情形。如果v关联一个3-面,则由引理5(1)可知其他2个关联面为6^+-面。因此,由R1.1可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + \frac{1}{2} \times 2 = 0$。如果$v$不关联3-面,则由R1.2可知$\mathrm{ch}^*(v) = \mathrm{ch}(v) + \frac{1}{3} \times 3 = 0$。

断言 令f是一个k-面且$k \geqslant 11$,若f关联x个4^+-顶点,则当$k + x \geqslant 16$是偶数或$k + x \geqslant 14$是奇数时,$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$。

证明若f相邻于m个worst-6-面,则由引理5(4)可知f至少关联m个rich-3-顶点。且由引理5(1)可知f至多相邻$\left\lfloor \frac{k+x}{2} \right\rfloor$个3-面。由R1、R3.1和R4可知,

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^*(f) &\geqslant \mathrm{ch}(f) - \left[\frac{1}{2} \times (k - x - m) + \frac{1}{3} \times m\right] - \frac{1}{2} \times \left\lfloor \frac{k+x}{2} \right\rfloor - \frac{1}{6} \times m \\ &= \frac{2k + 2x - 16}{4} - \frac{1}{2} \times \left\lfloor \frac{k+x}{2} \right\rfloor \\ &= \begin{cases} \frac{k+x-16}{4}, \text{若} k + x \text{是偶数}; \\ \frac{k+x-14}{4}, \text{若} k + x \text{是奇数}。 \end{cases}\end{aligned}$$

现只需验证对任意的$f \in F(G)$,有$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$。

令f是G中的任意面,因为G是简单图,所以$d(f) \geqslant 3$。若$d(f) \geqslant 16$,则由上述断言可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$。

(1)$d(f) = 3$。

因为G不含相邻的3-面,所以$\frac{d(v)-4}{t(v)} \geqslant \frac{d(v)-4}{\left\lfloor \frac{d(v)}{2} \right\rfloor} \geqslant \frac{1}{2}$。如果$f$至少关联两个$5^+$-顶点,则由R2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{2} \times 2 = 0$。如果$f$恰关联1个$5^+$-顶点,则当$f$相邻1个worst或worse-6-面时,由R2、R4.1和引理6可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 = 0$;否则,由R2、R3和R4.1可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times 3 = 0$。

如果f恰关联3个4-顶点,则当f相邻1个semi-bad-6-面时,由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times 2 = 0$;否则由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{3} \times 3 = 0$。

如果f恰关联2个4-顶点和1个3-顶点,则当f相邻一个semi-bad-6-面时,由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \times 2 = 0$;当$f$相邻1个bad-6-面时,由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$;否则由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{3} \times 3 = 0$。

如果f恰关联1个4-顶点和2个3-顶点,则由引理8可知f至多相邻1个bad-6-面。当f相邻1个worst或worse-6-面时,由R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{2} \times 2 = 0$;当$f$相邻1个bad-6-面,由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0$;否则由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{3} \times 3 = 0$。

如果f恰关联3个3-顶点,则由引理3可知f不能相邻于任何的worst-6-面。如果f相邻1个worse-6-面,则由R4.2和引理6可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{2} \times 2 = 0$;否则由R3和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) + \frac{1}{3} \times 3 = 0$。

(2)$d(f) = 6$。

如果f是一个非简单6-面,则由引理5(1)可知f不相邻于任何3-面,且由R1.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - \frac{1}{3} \times 4 = \frac{2}{3} > 0$。因此,在下面的讨论中假设$f$是1个简单6-面。由引理5(4)可知$f$至多相邻1个3-面。如果$f$不相邻于任何3-面,则由R1.2可知

$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{3} \times 6 = 0$。

如果f是light-6-面且相邻1个3-面,即f是worst-6-面,则由引理6和引理7可知f至少相邻于2个11^+-面且由R1和R3.1可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{6} \times 2 = 0$。

如果f是minimal-6-面且相邻1个3-面,即f是worse-6-面或bad-6-面。因此,由R1和R3.2可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \max\left\{\frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 3, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{6}\right\} = 0$。

如果f恰关联2个4^+-顶点且相邻1个3-面,则f是semi-bad-6-面或good-6-面。由R1、R3.3和R3.4可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \max\left\{\frac{1}{3} \times 4 + \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3}\right\} = 0$。

如果f至少关联3个4^+-顶点且相邻1个3-面,则f是good-6-面。因此,由R1和R3.4可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} > 0$。

(3)$d(f) = 7$。

由引理5(2)可知f不相邻于任何3-面,且由R1.2可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{3} \times 7 = \frac{2}{3} > 0$。

(4)$d(f) = 9$。

如果f是简单9-面,则由引理7可知f不相邻于任何3-面,因此由R1.2可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{3} \times 9 = 2 > 0$。如果$f$是非简单9-面,即$b(f)$是由1个3-圈和6-圈或3个3-圈构成的,则$f$至多相邻1个3-面。因此,由R1和R4可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times 5 - \frac{1}{2} = \frac{11}{6} > 0$。

(5)$d(f) = 10$。

由引理5(3)可知f至多非正规相邻1个3-面且由R1.2和R4可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{3} \times 6 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0$。

(6)$d(f) = 11$。

情形1:若f是light-11-面,则f至多相邻5个3-面。由引理3可知f不能相邻于任何的worst-6-面且每个相邻的3-面都是minimal-3-面。

如果f相邻于5个3-面,则由引理5(4)和引理6可知f至多相邻1个6-面g且g相邻1个3-面h。如果h是$(3, 3, 5^+)$-面,则由R1和R4可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - (\frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{3}) - (\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times 4) = \frac{1}{6} > 0$。如果$h$是$(3, 3, 4)$-面,则由引理9可知$g$不是bad-6-面且由R1和R4.2可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - (\frac{1}{2} \times 10 + \frac{1}{3}) - \frac{1}{3} \times 5 = 0$。

如果f至多相邻于4个3-面,则由R1和R4可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - (\frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{3} \times 3) - \frac{1}{2} \times 4 = 0$。

注:对于11^+-面f,在检验面f的权值时,可以将f关联的4^+-顶点都看成4-顶点。这是因为:

1)将5^+-顶点改成4-顶点,不减少f所相邻的3-面的个数,且不改变f的light性;

2)由权转移规则可知,f通过$(k, 5^+)$-边给相邻的3-面的权值为$\frac{1}{4}$或$\frac{1}{6}$,而f通过$(k, 4)$-边给相邻的3-面的权值为$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$或$\frac{1}{6}$。若f通过$(k, 5^+)$-边给相邻的3-面g的权值为$\frac{1}{4}$,则f通过$(k, 4)$-边给相邻的3-面g的权值不可能为$\frac{1}{6}$,所以f给相邻的3-面的权值不会减少;

3)f给关联的3-顶点的权值不变;

4)将5^+-顶点改成4-顶点,不减少f所相邻的worst-6-面的个数。

由注可知,只需考虑以下几种情形。

情形2:若f恰关联1个4-顶点u,则f至多相邻6个3-面。由引理3可知f至多需要给2个worst-6-面权值。

如果f恰相邻6个3-面,则由引理5(4)可知f不能相邻于任何的6-面且4-顶点u也不关联任何的6-面。因此,由R1.1和R4.2可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - \frac{1}{2} \times 10 - \frac{1}{3} \times 6 = 0$。

如果f恰相邻5个3-面,当u关联2个3-面时,f至多相邻2个worst-6-面。此时,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f) \geqslant ch(f) - (\frac{1}{2} \times 8 + \frac{1}{3} \times 2) - (\frac{1}{2} \times$

$2+\frac{1}{3}\times 3)-\frac{1}{6}\times 2=0$。如果$u$恰关联一个3-面,则$f$至多相邻1个worst-6-面和1个worse-6-面且该worse-6-面关联于u。此时,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 9+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 3)-\frac{1}{6}=0$。如果$u$不关联任何3-面,则$f$至多相邻2个worse-6-面且这两个worse-6-面都关联于u。此时,由R1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-\frac{1}{2}\times 10-(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 3)=0$。

如果f至多相邻4个3-面,则由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{6}\times 2=0$。

情形3:若f恰关联2个4-顶点u和v,则f至多相邻6个3-面。由引理3可知f至多需要给4个worst-6-面权值。

如果f恰相邻6个3-面,则f关联1个rich-3-顶点或者4-顶点u关联1个3-面。如果f关联1个rich-3-顶点,则f至多相邻1个worst-6-面。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 5)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}>0$。如果$u$关联1个3-面,则$f$至多相邻1个6-面且该6-面关联于$u$。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-\frac{1}{2}\times 9-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 5)=\frac{1}{3}>0$。

如果f恰相邻5个3-面,则f至多关联3个rich-3-顶点。

如果$uv\in E(G)$且u和v都关联2个3-面,则f关联3个rich-3-顶点。因此,f至多相邻3个6-面且由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 6+\frac{1}{3}\times 3)-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{3}>0$。如果$uv\in E(G)$且只有$v$关联2个3-面,则$f$至多相邻3个6-面且其中一个6-面关联$u$。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 7+\frac{1}{3}\times 2)-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}>0$。如果$uv\in E(G)$且$u$和$v$都恰关联一个3-面,则$f$关联一个rich-3-顶点。因此,$f$至多相邻1个6-面且每个关联于$u$或$v$的3-面都可以相邻于1个6-面。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}>0$。因此,可以假设$uv\in E(G)$且关联于$u$或$v$的3-面的总个数至多为1。如果$u$和$v$恰关联同一个3-面,则$f$恰关联一个rich-3-顶点。因此,$f$至多相邻3个6-面且这些6-面都不是worst-6-面。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)=\frac{1}{2}>0$。如果只有$u$关联1个3-面,则$f$不关联任何的rich-3-顶点。因此,$f$至多与1个关联$v$的6-面相邻于(3,4)-边,除此之外,关联于$u$的3-面可能相邻1个6-面,所以由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-\frac{1}{2}\times 9-(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 3)=\frac{1}{2}>0$。

如果$uv\notin E(G)$且u和v都关联2个3-面,则f关联3个rich-3-顶点。因此,f至多相邻3个6-面且由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 6+\frac{1}{3}\times 3)-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}\times 3=\frac{1}{3}>0$。如果$uv\notin E(G)$且$v$关联2个3-面,$u$关联1个3-面,则$f$至多相邻3个6-面且其中1个6-面关联$u$。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 7+\frac{1}{3}\times 2)-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}>0$。如果$u$不关联任何的3-面,则$f$关联一个rich-3-顶点。因此,$f$至多相邻1个worst-6-面和2个关联于$u$的6-面。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}>0$。如果$uv\notin E(G)$且$u$和$v$都恰关联1个3-面,则$f$关联1个rich-3-顶点。因此,$f$至多相邻1个worst-6-面和关联于$u$或$v$的2个6-面。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$ch^*(f)\geqslant ch(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}>0$。如果$uv\notin E(G)$且只有$v$恰关联1个3-面,则$f$不关联任何rich-3-顶点。因此,$f$

至多相邻3个6-面且这些6-面关联于u或v,由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 9-(\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{3}\times 2)=\frac{1}{3}>0$。

如果f至多相邻4个3-面,则由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3})-\frac{1}{2}\times 4-\frac{1}{6}\times 4=0$。

情形4:若f恰关联3个4-顶点,则f至多相邻7个3-面。如果f恰相邻7个3-面,则由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 8-\frac{1}{3}\times 7=\frac{2}{3}>0$。如果$f$至多相邻6个3-面且$f$相邻$m$个worst-6-面,则$f$关联$m$个rich-3-顶点且由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-[\frac{1}{2}\times(8-m)+\frac{1}{3}\times m]-\frac{1}{2}\times 6-\frac{1}{6}\times m=0$。

情形5:如果f至少关联4个4-顶点,则由断言1可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant 0$。

(7)$d(f)=12$。

若f是light-12-面,则f至多相邻6个3-面。由引理3可知f不能相邻于任何的worst-6-面且每个相邻的3-面都是minimal-3-面。如果f相邻于6个3-面,则由引理5(4)可知f不能相邻于任何的6-面。因此由R1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 12-\frac{1}{3}\times 6=0$。如果$f$相邻5个3-面,则$f$关联2个rich-3-顶点。因此$f$至多相邻2个6-面且由R1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-(\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{3}\times 2)-(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times 3)=\frac{1}{3}>0$。如果$f$至多相邻4个3-面,则由R1和R4可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-(\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{3}\times 4)-\frac{1}{2}\times 4=\frac{2}{3}>0$。

如果f恰关联一个4-顶点,则f至多相邻6个3-面。如果f恰相邻6个3-面,则由引理5(4)和引理6可知f至多相邻1个6-面。因此,由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 11-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 5)-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}>0$。如果$f$至多相邻5个3-面且$f$相邻$m$个worst-6-面,则$f$关联$m$个rich-3-顶点且由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-[\frac{1}{2}\times(11-m)+\frac{1}{3}\times m]-\frac{1}{2}\times 5-\frac{1}{6}\times m=\frac{1}{6}>0$。

如果f恰关联2个4-顶点,则f至多相邻7个3-面。如果f恰相邻7个3-面,则由引理5(4)可知f不相邻任何6-面。因此,由R1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 10-\frac{1}{3}\times 7=\frac{2}{3}>0$。如果$f$至多相邻6个3-面且$f$相邻$m$个worst-6-面,则$f$关联$m$个rich-3-顶点且由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-[\frac{1}{2}\times(10-m)+\frac{1}{3}\times m]-\frac{1}{2}\times 6-\frac{1}{6}\times m=0$。

如果f至少关联3个4-顶点,则由断言1可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant 0$。

(8)$d(f)=13$。

若f是light-13-面,则f至多相邻6个3-面。由引理3可知f不能相邻于任何的worst-6-面且每个相邻的3-面都是minimal-3-面。如果f相邻于6个3-面,则f恰关联一个rich-3-顶点且由引理5(4)可知f至多相邻1个6-面。因此由R1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-(\frac{1}{2}\times 12+\frac{1}{3})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 5)=\frac{1}{2}>0$。如果$f$至多相邻5个3-面,则由R1和R4可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-(\frac{1}{2}\times 10+\frac{1}{3}\times 3)-\frac{1}{2}\times 5=\frac{1}{2}>0$。

如果f恰关联1个4-顶点,则f至多相邻7个3-面。如果f恰相邻7个3-面,则由引理5(4)可知f不能相邻于任何的6-面。因此,由R1.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 12-\frac{1}{3}\times 7=\frac{2}{3}>0$。如果$f$至多相邻6个3-面且$f$相邻$m$个worst-6-面,则$f$关联$m$个rich-3-顶点且由R1、R3.1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-[\frac{1}{2}\times(12-m)+\frac{1}{3}\times m]-\frac{1}{2}\times 6-\frac{1}{6}\times m=0$。

如果f至少关联2个4-顶点,则由断言1可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant 0$。

(9)$d(f)=14$。

若f是light-14-面,则f至多相邻7个3-面。由引理3可知f不能相邻于任何的worst-6-面且每个相邻的3-面都是minimal-3-面。如果f相邻于7个3-面,则由引理5(4)可知f不相邻任何6-面。因此,由R1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f)\geqslant \mathrm{ch}(f)-\frac{1}{2}\times 14-\frac{1}{3}\times 7=\frac{2}{3}>0$。如果$f$至多相邻6个3-面,则由R1、R3.1和

R4.2 可知 $\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - (\frac{1}{2} \times 12 + \frac{1}{3} \times 2) - \frac{1}{2} \times 6 = \frac{1}{3} > 0$。

如果f至少关联1个4-顶点,则由断言1可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$。

(10)$d(f) = 15$。

若f是light-15-面,则f至多相邻7个3-面。由引理3可知f不能相邻于任何的worst-6-面且每个相邻的3-面都是minimal-3-面。因此,由R1和R4.2可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant \mathrm{ch}(f) - (\frac{1}{2} \times 14 + \frac{1}{3}) - \frac{1}{2} \times 7 = \frac{1}{6} > 0$。

如果f至少关联1个4-顶点,则由断言1可知$\mathrm{ch}^*(f) \geqslant 0$。

参 考 文 献

[1] VIZING V. Vertex colorings with given colors [J]. Metody Diskret Analiz(Novosibirst),1976,29:3-10.

[2] ERDŐS P, RUBIN A, TAYLOR H. Choosability in graphs[C]//CHINN P, MCCARTHY D. Proceedings of the West Coast Conference on combinatorics, graph theory and computing. Arcata, California: Humboldt State University,1979(26):125-157.

[3] THOMASSEN C. Every planar graph is 5-choosable[J]. Journal of Combinatorial Theory Series B,1994,62(1):180-181.

[4] THOMASSEN C.3-list-coloring planar graphs of girth 5 [J]. Journal of Combinatorial Theory Series B,1995,64(1):101-107.

[5] VOIGT M. List coloring of planar graphs[J]. Discrete Mathematics,1993,120(1/2/3):215-219.

[6] VOIGT M, WIRTH B. A not 3-choosable planar graph without 3-cycles[J]. Discrete Mathematics,1995,146(1/2/3):325-328.

[7] DVOŘÁK Z, POSTLE L. Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of length 4 to 8[J]. Journal of Combinatorial Theory(Series B),2018,129:38-54.

[8] BERNSHTEYN A. The asymptotic behavior of the correspondence chromatic number [J]. Discrete Mathematics,2016,339(11):2680-2692.

[9] ALON N. Degrees and choice numbers[J]. Random Structures & Algorithms,2000,16(4):364-368.

[10] BERNSHTEYN A, KOSTOCHKA A. Sharp dirac's theorem for DP-critical graphs[J]. Journal of Graph Theory,2018,88(3):521-546.

[11] BERNSHTEYN A, KOSTOCHKA A, PRON S. On DP-coloring of graphs and multigraphs [J]. Siberian Mathematical Journal,2017,58(1):28-36.

[12] BERNSHTEYN A, KOSTOCHKA A, ZHU X. DP-colorings of graphs with high chromatic number[J]. European Journal of Combinatorics,2017,65:122-129.

[13] CHEN L, LIU R, YU R, et al. DP-4-colorability of two classes of planar graphs [J]. Discrete Mathematics, 2019,342(11):2984-2993.

[14] KIM S J, OZEKI K. A sufficient condition for DP-4-colorability[J]. Discrete Mathematics, 2018, 341(7): 1983-1986.

[15] LIU R, LI X, NAKPRASIT K, et al. DP-4-colorability of two classes of planar graphs without adjacent cycles of given length [J]. Discrete Applied Mathematics, 2020,277:245-251.

[16] LIU R, LOEB S, ROLEK M, et al. DP-3-coloring of planar graphs without 4, 9-cycles and cycles of two lengths from {6, 7, 8}[J]. Graphs and Combinatorics, 2019,35(3):695-705.

[17] LIU R, LOEB S, YIN Y, et al. DP-3-coloring of some planar graphs[J]. Discrete Mathematics, 2019, 342(1): 178-189.

[18] YIN Y, YU G. Planar graphs without cycles of lengths 4 and 5 and close triangles are DP-3-colorable [J]. Discrete Mathematics,2019,342(8):2333-2341.

[19] ZHANG H. A sufficient condition for a toroidal graph to be 3-choosable [J]. Ars Combinatoria, 2012, 105: 193-203.

[20] WANG Y, WU Q. Planar graphs without cycles of length 4, 5, 8 or 10 are 3-choosable[J]. Advances in Applied Mathematics,2011,10(3):297-305.

(责任编辑:马田田)