DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.03.002



# 有限个GO-空间乘积的$\alpha$-正规性

王 雪 马利文
(北京邮电大学理学院,北京 100876)

**摘 要**

本文证明了最小线性序紧化中点的共尾数不超过$\omega_1$的有限个GO-空间的乘积是遗传$\alpha$-正规空间.

**关键词:** GO-空间,LOTS,$\alpha$-正规空间,稳定集.
**中图分类号:** O189.1

## 1 引 言

在参考文献[1]中,Hirata和Kemoto证明了$\omega_1$的有限次幂都是遗传$\alpha$-正规的,但$\omega_1$的无限次幂可能不是.他们又证明了$(\omega_1+1)\times\omega_1$也不是$\alpha$-正规空间.本文中我们更一般地考虑GO-空间(generalized ordered spaces)[2]的乘积空间的$\alpha$-正规性.根据Hirata和Kemoto在上述研究中的结论,GO-空间的无限乘积并不总是遗传$\alpha$-正规的.更进一步,我们可以推导GO-空间的乘积(其中某些元素的共尾数比$\omega_1$大)也并不总是遗传$\alpha$-正规的.因此,在本文中,我们讨论有限个GO-空间乘积的遗传$\alpha$-正规性,其中的GO-空间的最小线性序紧化中的每个元素都有不大于$\omega_1$的共尾数.

## 2 预备知识

首先我们引入本文涉及的一些概念.

一个LOTS[2,3](linearly ordered topological space)是一个三元组$<X,\lambda,\leqslant>$,其中$<X,\leqslant>$是一个线性序集,$\lambda$是由$\leqslant$诱导的区间拓扑(即$\lambda$是$\{(a,\rightarrow):a\in X\}\cup\{(\leftarrow,a):a\in X\}$作为子基生成的拓扑,其中$(a,\rightarrow)=\{x\in X:a<x\}$,$(\leftarrow,a)=\{x\in X:a>x\}$.一个GO-空间是一个三元组$<X,T,\leqslant>$,其中$<X,\leqslant>$是一个线性序集,$T$是$X$上的一个拓扑,满足$\lambda\subset T$且$T$有一个基是由序凸集构成的.$X$的子集$A$被称作序凸的,如果处于$A$的任两元素之间的$x$,都有$x\in A$.

一个GO-空间$X$的LOC[4](linearly ordered compactification)是以$X$为稠子集的一个紧的LOTS.一个拓扑空间$Y$被称作一个GO-空间$X$的MLOC[4](minimal ordered compactification),对$X$任意的LOC $L$,都有一个连续映射$f:L\to Y$使得$f$在$X$上的限制$f|X$是$X$上的单位映射$1_X$.本文中,用$LX$表示$X$的MLOC.

$X=(\leftarrow,x)$的一个子集$A$被称作关于$x$0-无界的[4],若对任意的$y<x$,都有$a\in A$使得$y\leqslant a$.相应的,可定义$x$的1-无界集$A\subset(x,\rightarrow)$中关于$x$的1-无界集.记$i-cfx=\min\{|A|:A$为关于$xi$-无界的$\}$,$i\in 2$,其中2是一个序数,$cfx=\max\{0-cfx,1-cfx\}$.对一个基数$\kappa$,一个关于$x$的严格递增的0-无界序列$\{x(\alpha):\alpha<\kappa\}$被称作是一个关于$x$的0-正规序列,如果对任意的极限序数$\alpha<\kappa$有$x(\alpha)=\sup\{x(\beta):\beta<\alpha\}$.相应地,一个关于$x$的1-正规序列可被定义.

一个基数$\kappa$被称作是正则的[5-7],如果$cf(\kappa)=\kappa$,其中$cf(\kappa)$表示$\inf\{\beta:\beta$是与$\kappa$共尾的序数$\}$.一个集合$S\subset\kappa$被称作是一个正则不可数基$\kappa$的稳定集,如果对$\kappa$任意的闭子集$C$,都有$S\cap C\neq\phi$.显然,$\kappa$是$\kappa$的稳定集,且$\kappa$的所有极限序数构成的集也是$\kappa$的稳定集.类似地,可定义一个极限序数$\alpha$的稳定集.

一个空间$X$是$\alpha$-正规的[1],如果任取$X$不相交的闭子集$F_0,F_1$,都存在$X$不相交的开子集$U_0,U_1$使得$\mathrm{Cl}(F_i\cap U_i)=F_i,i\in 2$并且$U_0\cap U_1=\phi$,其

收稿日期:2016-11-01



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

中 $\mathrm{Cl}(A)$ 表示集合 A 的闭包. 此时我们也称 $F_0, F_1$ 是 $\alpha$-可分离的. 显然正规性蕴含了 $\alpha$-正规性.

下面我们引入一些本文使用的符号.

$A - B$ 表示为两个集合 $A$ 与 $B$ 的差集: $(\leftarrow, x) = \{y \in LX: y < x \in LX\}$; 对 $A \subset \omega_1$, 记 $\mathrm{Lim}(A) = \{\alpha < \omega_1: \sup(A \cap \alpha = \alpha)\}$, $\mathrm{Succ}(A) = A - \mathrm{Lim}(A)$, $\mathrm{Lim} = \mathrm{Lim}(\omega_1)$, $\mathrm{Succ} = \mathrm{Succ}(\omega_1)$, 其中 $\sup\phi = -1$; 对 $\omega_1$ 任意的闭无界子集 C 和 $\alpha \in C$, 记 $p_C(\alpha) = \sup(C \cap \alpha)$; 对集合 $A$ 和 $B$, 记 $B^A$ 为所有从 $A$ 到 $B$ 的映射的集合, 并且记 $P(A)$ 为 $A$ 的所有子集的集合. 令 $1 \leqslant n < \omega$, 对任意的 $K \in P(n) - \{\phi\}$, $z \in X^{n-K}$, 且 $a \in X$, 我们定义 $x_{az} \in X^n$ 为

$$x_{az}(k) = \begin{cases} z(k), & k \in n - K \\ a, & k \in K \end{cases},$$

其中 $x(k)$ 表示 $x$ 的第 $k$ 个坐标, 对任意的 $D \subset X^n$, 记 $V_z(D) = \{a \in X: x_{az} \in D\}$.

## 3　主要结果

**定理**　设 $X$ 是一个 GO-空间, 并记 $X_\omega = \{x \in LX - X: \exists i \in 2, i - cfx = \omega\}$, $X_{\omega 1} = \{x \in LX - X: \exists i \in 2, i - cfx = \omega_1\}$. 若 $X$ 满足:

(1) 对任意的 $i \in 2$, 对每个 $x \in X$, 都有 $i - cfx \leqslant \omega$, 且对每个 $x \in LX - X$ 都有 $i - cfx \leqslant \omega_1$;

(2) $X_\omega$ 的每个子集在 $LX$ 中的任何闭区间上都不是稠密的, 且 $X_{\omega_1}$ 在 $X$ 中没有聚点;

则 $X^n$ 是遗传 $\alpha$-正规空间.

**证明**　首先, 根据(1)和(2), $X$ 可被划分为开闭子集的直和, 即 $X = \oplus_\alpha X_\alpha$, 其中 $X_\alpha$ 是一个子空间且至多有一个 $x^* \in LX_\alpha - X_\alpha$ 满足 $0 - cfx^* = \omega_1$ 和至多一个 $x^{**} \in LX_\alpha - X_\alpha$ 满足 $1 - cfx^{**} = \omega_1$. 进一步, $X_\alpha$ 可被划分为两个闭子集, 每个闭子集至少存在一个 $x^* \in LX_\alpha - X_\alpha$, 对某个 $i \in 2$ 满足 $1 - cfx^* = \omega_1$. 所以不失一般性, 我们可以假设 $X$ 是 $X_\alpha$ 的闭子集, 且对任意的 $x \in X$ 都有 $i = 0, x^* > x$. 令 $Y$ 是 $X^n$ 的一个子空间. 我们只需要证明 $Y$ 是 $\alpha$-正规的.

令 $\theta$ 是一个从 $\omega_1 + 1$ 到 $LX$ 的闭无界同胚嵌入映射, 即 $\omega_1$ 的像集是 $LX$ 中 $x^*$ 的一个 0-正规序列. 根据条件(2), 我们可以假设对任意的 $\alpha \in \omega_1$, 在 $X$ 中都有一个 $\theta(\alpha)$ 的直接后继元. 令 $\theta^{-1}[B]$ 表示 $LX$ 的子集 $B$ 的原像集.

设 $F_0, F_1$ 为 $Y$ 的两个不相交的闭子集. 下面我们证明它们是 $\alpha$-可分离的.

对任意的 $K \in P(n) - \{\phi\}$ 和 $z \in X^{n-K}$, 及对某个 $i \in 2$, 若 $\theta^{-1}[V_z(F_i)]$ 在 $\omega_1$ 中是稳定集, 则找一个 $\omega_1$ 中的闭无界子集 $C_z$ 使得 $C_z \subset \mathrm{Lim}(\theta^{-1}[V_z(F_i)])$; 另一方面, 若 $\theta^{-1}[V_z(F_i)]$ 在 $\omega_1$ 中对某个 $i \in z$ 不是稳定集, 则可找一个 $\omega_1$ 中的闭无界子集 $C_z$ 使得 $C_z \cap \theta^{-1}[V_z(F_i)] = \phi$. 令 $C = \cap_{K \in P(n) - \{\phi\}} \{\theta^{-1}[y]: y \in LX, \forall z \in (\leftarrow, y)^{n-K} (y \in \theta[C_z])\}$. 根据定理的条件可知 $(\leftarrow, y)$ 是可数的, 另外由于 $P(n)$ 也是可数的, 于是 $C$ 是 $\omega_1$ 中可数闭无界子集的交集. 因此, 它也是 $\omega_1$ 中的一个闭无界集.

对任意的 $\alpha \in \mathrm{Succ}(C)$, $K \in P(n) - \{\phi\}$, 令 $Y(\alpha, K) = \{x \in Y: \forall k \in n - K (x(k) \leqslant \theta[p_C(\alpha)]), \forall k \in K (\theta[p_C(\alpha)] < x(k) \leqslant \theta(\alpha))\}$. 根据 $\theta$ 的定义, $\{Y(\alpha, K): \alpha \in \mathrm{Succ}(C), K \in P(n) - \{\phi\}\}$ 是 $Y$ 中两两不相交的开子集构成的集. 再者, 每个 $Y(\alpha, K)$ 是可数的也表明了每个 $Y(\alpha, K)$ 是 $Y$ 的一个正规子集. 因此在 $X$ 中存在 $Y(\alpha, K)$ 的不相交开子集 $U_0$ 和 $U_1$, 使得 $Y(\alpha, K) \cap F_i \subset U_i(\alpha, K)$, $i \in 2$. 令 $U_i = \cup \{U_i(\alpha, K): \alpha \in \mathrm{Succ}(C), K \in P(n) - \{\phi\}\}$, $i \in 2$. 显然, $U_0$ 和 $U_1$ 是 $Y$ 的两个不交开子集. 下面我们证明 $F_i \subset \mathrm{Cl}(F_i \cap U_i)$, $i \in 2$.

取 $x \in F_i$, 现在我们证明 $x \in \mathrm{Cl}(F_i \cap U_i)$. 令 $\beta = \min\{\alpha \in C: \max\{x(k): k \in n\} \leqslant \theta(\alpha)\}$, 则需考虑下面两种情况.

**情况 1**　$\beta \in \mathrm{Succ}(C)$. 令 $K = \{k \in n: \theta[p_C(\beta)] \leqslant x(k) \leqslant \theta(\beta)\}$. 由 $\beta$ 的定义知 $K \neq \phi$ 和 $x \in Y(\beta, K) \cap F_i \subset U_i \cap F_i \subset \mathrm{Cl}(U_i \cap F_i)$.

**情况 2**　$\beta \in \mathrm{Lim}(C)$. 存在 $k \in n$ 使得 $x(k) = \theta(\beta)$. 令 $K = \{k \in n: x(k) = \theta(\beta)\}$, 则 $K \neq \phi$. 令 $z = x \mid (n - K)$, 则有 $z \in (\leftarrow, \theta(\beta))^{n-K}$. 由 $C_z$ 的定义及 $V_z(F_i)$, 便有 $\beta \in C_z$ 和 $\theta(\beta) \in V_z(F_i)$. 因此 $\beta \in C_z \cap \theta^{-1}[V_z(F_i)]$, $C_z$ 的定义也表明了 $\theta^{-1}[V_z(F_i)]$ 是 $\omega_1$ 的稳定集. 从而 $C_z \subset \mathrm{Lim}(\theta^{-1}[V_z(F_i)])$. 下面我们证明 $x \in \mathrm{Cl}(U_i \cap F_i)$. 取 $x$ 的开邻域, 只需证明 $W \cap (U_i \cap F_i) \neq \phi$. 由于 $\beta \in \mathrm{Lim}(C)$, 有 $\gamma < \beta$ 使得 $z \in (\leftarrow, \theta(\gamma))^{n-K}$ 且 $Y \cap \{x_{\theta(\eta)z}: \eta \in (\gamma, \beta]\} \subset W$. 由 $\gamma < \beta \in \mathrm{Lim}(C)$ 可知存在 $\delta \in \mathrm{Succ}(C)$ 使得 $\gamma < p_C(\delta) < \delta < \beta$. 由于 $\delta \in C \cap \beta$ 且 $z \in (\leftarrow, \theta(\delta))^{n-K}$, 我们有 $\gamma < p_C(\delta) < \delta \in C_z \subset \mathrm{Lim}(\theta^{-1}[V_z(F_i)])$. 取 $\zeta \in \theta^{-1}[V_z(F_i)]$, 使得 $p_C(\delta) < \zeta < \delta$. 则 $x_{\theta(\zeta)z} \in W \cap F_i \cap Y(\delta, K) \subset W \cap F_i \cap U_i(\delta, K) \subset W \cap F_i \cap U_i$. 这便证明了 $W \cap (F_i \cap U_i) \neq \phi$. 所以 $x \in \mathrm{Cl}(F_i \cap U_i)$.



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

这样,我们证明了 $Y$ 是 $\alpha$-正规的,由于子集 $Y$ 的任意性,这也表明了 $X^n$ 是遗传 $\alpha$-正规的. 参考文献[1]的定理 1 是这个定理的一个特殊情况,因而我们将它作为此定理的一个推论列出.

推论 $\omega_1^n$ 是遗传 $\alpha$-正规空间.

注 条件(1)和(2)都不能被省略. 我们给出两个例子来表明这一点.

例 1[11] $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ 是一个不满足条件(1)的非 $\alpha$-正规的空间.

例 2 两个 Sorgenfrey lines 空间的积空间 $K^2$,不满足条件(2),我们可以简单证明 $K^2$ 不是 $\alpha$-正规的.

令 $L = \{(x,y) \in K^2 : y = -x\}$,则 $L$ 是 $K^2$ 的一个离散闭子空间[8]. 取集合 $F_0 = \{(x,y) \in L : x \in Q\}$,$F_1 = \{(x,y) \in L : x \in R - Q\}$,其中 $Q$ 和 $R - Q$ 分别是有理数和无理数. 在[9]中已证明 $F_0$ 和 $F_1$ 不能被不相交的开集分离. 我们证明 $F_0$ 和 $F_1$ 也不是 $\alpha$-可分离的. 若不然,若存在不相交的开集 $U_0$ 和 $U_1$ 使得 $\mathrm{Cl}(F_0 \cap U_0) = F_0$,$\mathrm{Cl}(F_1 \cap U_1) = F_1$,即 $F_0$,$F_1$ 分别以 $F_0 \cap U_0$,$F_1 \cap U_1$ 作为它的稠子集. 由于 $F_0$ 和 $F_1$ 的稠子集是他们自己,则 $F_0 \subset U_0$,$F_1 \subset U_1$. 这与 $F_0$ 和 $F_1$ 不能被不相交的开集分离矛盾. 因此 $K^2$ 不是 $\alpha$-正规的.

## 参 考 文 献


[1] Hirata Y, Kemoto N. The hereditarily collectionwise Hausdorff property in products of $\omega_1$ [J]. Topology Proceedings, 2005, 29: 167 – 173.

[2] Miwa T, Kemoto N. Linearly ordered extensions of GO-spaces [J]. Topology and It's Applications, 1993, 54: 133 – 140.

[3] Lutzer D J. On generalized ordered spaces [J]. Dissertations Math, 1971, 89: 5 – 32.

[4] Kemoto N. Normality of products of GO-spaces and cardinal [J]. Topology Proceedings, 1993, 18: 133 – 142.

[5] Kuratowski K, Mostowski A. Set Theory [M]. Amsterdam: PWN-Polish Scientific Publishers, 1996.

[6] Erdös P, Hajnal A, Máté A, et al. Combinatorial set theory: partition relations for cardinals [M]. Budapest: Akadémiai Kiadó, 1984.

[7] Douwen E V, Lutzer D J. On the classification of stationary sets [J]. Michigan Math, 1979, 26: 47 – 64.

[8] Engelking R. General topology [M]. Warszaw: Polish Scientific Publishers, 1977.

[9] 汪林,杨富春. 拓扑空间中的反例 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.


# $\alpha$-Normality in Products of Finite GO-Spaces


Wang Xue Ma Liwen

(School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876)



**Abstract**

In this paper, we prove that the finite product of GO-spaces, every one of which has the cofinality no bigger than $\omega_1$ in its minimal linearly ordered compactification, is hereditarily $\alpha$-normal.



**Key words:** GO-spaces, LOTS, $\alpha$-normal, stationary.




(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net