DOI:10.19789/j.1004-9398.2022.02.001
文献引用:关新雨,侯庆虎.二元差分域上一阶差分方程的多项式解[J].首都师范大学学报(自然科学版),2022,43(2):1-6. GUAN X Y, HOU Q H. Polynomial solutions of the first order difference equations in the bivariate difference field[J]. Journal of Capital Normal University (Natural Science Edition),2022,43(2):1-6.

二元差分域上一阶差分方程的多项式解*

关新雨,侯庆虎
(天津大学数学学院,天津 300350)

摘要:本文研究了在二元域$\mathbb{F}(\alpha,\beta)$(α、β是域$\mathbb{F}$上代数无关的超越元)上一阶线性差分方程$a\sigma(f)+bf=g$的多项式解f,式中a、b、g是二元域$\mathbb{F}(\alpha,\beta)$上的已知多项式,σ是域$\mathbb{F}(\alpha,\beta)$上满足$\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=u\alpha+v\beta$的域同构,其中$u,v\neq 0$.通过多项式次数分解得到多项式解$f$存在的性质,然后根据待定系数法求得多项式$f$,并给出了这类差分方程多项式解在符号求和方面的应用.

关键词:差分方程;多项式解;次数分解;二元差分域
中图分类号:O157.1

Polynomial solutions of the first order difference equations in the bivariate difference field*

GUAN Xinyu, HOU Qinghu
(School of Mathematical Science, Tianjin University, Tianjin 300350)

Abstract: This paper study polynomial solutions of the difference equation $a\sigma(f)+bf=g$ in the bivariate difference field $\mathbb{F}(\alpha,\beta)$, where α,β are two algebraically independent transcendental elements, σ is a transformation that satisfies $\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=u\alpha+v\beta,\ u,v\neq 0$, a,b,g are known binary polynomials in $\mathbb{F}(\alpha,\beta)$. The nature of the polynomial solution f is obtained by decomposition of the polynomial degree, and then the polynomial f is obtained according to the undetermined coefficient method. And some examples are given to illustrate the applications of this class of difference equations in symbolic summation.

Keyword: difference equations; polynomial solutions; degree decomposition; bivariate difference fields
CLC: O157.1

0 引 言

差分方程是用于描述特殊函数和数字序列的一类重要的方程.寻找差分方程的封闭形式解是研究差分方程的课题之一.为处理涉及调和数的求和,Karr[1-2]考虑差分域$(\mathbb{F},\sigma)$的延拓$(\mathbb{F}(t),\sigma)$.满足一阶(非齐次)递推的序列可以很容易地用这个模型来描述.当序列满足二阶线性递推关系时,本文考虑序列的差分域形式$(\mathbb{F}(\alpha,\beta),\sigma)$,其中$\alpha$、$\beta$是域$\mathbb{F}$上代数无关的超越元,$\sigma$是差分域$(\mathbb{F}(\alpha,\beta),\sigma)$的域同构:$\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=u\alpha+v\beta,u,v\in\mathbb{F}$,$\forall f\in\mathbb{F}$,都有$\sigma(f)\in\mathbb{F}$.斐波那契序列满足以上条件,序列为

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1},F_0=F_1=1, \tag{1}$$

收稿日期:2021-01-08
* 国家自然科学基金项目(11771330)

可以看为

$$\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha,\beta), \sigma|_{Q} = id, \sigma(\alpha) = \beta, \sigma(\beta) = \alpha + \beta. \quad (2)$$

再如Apéry数,$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$,满足

$$A_{n+2} = \frac{(2n+3)(17n^2+51n+39)}{(n+2)^3} A_{n+1} - \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3} A_n, A_0 = 1, A_1 = 5, \quad (3)$$

可以看为:

$$\alpha \in \mathbb{Q}(n)(\alpha,\beta), \sigma|_{\mathbb{Q}} = id, \sigma(n) = n+1,$$
$$\sigma(\alpha) = \beta, \sigma(\beta) = \frac{(2n+3)(17n^2+51n+39)}{(n+2)^3}\beta - \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3}\alpha. \quad (4)$$

许多学者研究了计算差分方程多项式解的问题.求差分方程的多项式解的2个步骤为:计算差分方程多项式解f的次数上界N;给定N,计算次数不超过N的多项式解.比如,Gosper算法的第3步给出了求解一阶线性差分方程多项式解的算法[3],差分方程形为$a(n)x(n+1) - b(n-1)x(n) = c(n)$.1989年,Abramov[4]首次提出了一种寻找多项式系数线性差分方程所有多项式解的算法,形如$\sum_{i=1}^{m} p_i(n)a(n+i) = p_{m+1}$;Petkovšek[5]给出了一个求二阶和高阶差分方程多项式解的算法,其形式为$\sum_{i=0}^{d} p_i(n)a(n+i) = 0$,其中$p_i$是多项式;Abramov等[6]改进了这些次数上界,并给出了q-差分情形下的次数上界;Abramov和Barkatou[7]提出一种计算一阶线性差分方程组多项式解的算法;余江涛和柳银萍[8]利用齐次平衡原理考虑非线性差分方程的多项式解,并提出n阶展开法处理齐次平衡原理的不能解决的情形,即

$$\sum_{k=0}^{l}\left[a_k(x)\prod_{i=0}^{r} f^{\gamma_{ki}}(x+i)\right] = 0, \quad (5)$$

多项式解的次数上界确定后,通常采用待定系数法计算f,待定系数法存在的问题是未知数的个数通常远大于方程的个数;Abramov等[6]指出,通过使用多项式基方法,可以有效避免这一问题.

为得到二阶递推序列的新组合恒等式和相关应用,本文在二元域$\mathbb{F}(\alpha,\beta)$上,研究一阶线性差分方程$a\sigma(f) + bf = g$的多项式解f,式中a、b、g是二元域$\mathbb{F}(\alpha,\beta)$上的已知多项式,使用次数分解方法讨论差分方程多项式解存在的性质,然后用待定系数法计算多项式解f.注意到,域同构σ保持多项式的总次数不变.

符号说明:对于多项式$f \in \mathbb{F}(\alpha,\beta)$,设$\deg f$表示多项式$f$中$\alpha$、$\beta$的总次数;对一个给定的多项式$f$的次数分解,是将$f$分解为其齐次部分$f_0, f_1, \cdots, f_n$.本文使用总次数词典排序,使得$\alpha > \beta$.

1 差分方程$\sigma(f) \pm f = g$的多项式解

1.1 $\sigma(f) \pm f = g$的多项式解存在的性质

定理1 多项式f是方程$\sigma(f) \pm f = g$的解当且仅当f的次数分解$\sum_{i=0}^{n} f_i$和g的次数分解$\sum_{i=0}^{n} g_i$满足:

$$\sigma(f_i) \pm f_i = g_i, \text{当} 0 \leqslant i \leqslant \deg g;$$
$$\sigma(f_i) \pm f_i = 0, \text{当} i > \deg g. \quad (6)$$

证明 设$\deg f = n$和$\deg g = m$.

必要性是显然的.如果f和g的次数分解满足方程式(6),那么

$$\sigma(f) \pm f = \sigma(f_0 + f_1 + \cdots + f_n) \pm (f_0 + f_1 + \cdots + f_n) =$$
$$(\sigma(f_0) \pm f_0) + (\sigma(f_1) \pm f_1) + \cdots + (\sigma(f_m) \pm f_m) +$$
$$(\sigma(f_{m+1}) \pm f_{m+1}) + \cdots + (\sigma(f_n) \pm f_n) =$$
$$g_0 + g_1 + \cdots + g_m = g.$$

所以$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$是差分方程$\sigma(f) \pm f = g$的多项式解.

再证充分性.设$f_k = \sum_{i=0}^{k} \lambda_{i,k}\alpha^i\beta^{k-i}$,则

$\sigma(f_k) = \sum_{i=0}^{k} \sigma(\lambda_{i,k})\beta^i(u\alpha + v\beta)^{k-i}$,将$\sigma(f_k) \pm f_k$合并同类项后可得

$$\sigma(f_k) \pm f_k = \sum_{j=0}^{k}\left(\sum_{i=0}^{k-j} u^j v^{k-i-j}\sigma(\lambda_{i,k})\binom{k-i}{j} \pm \lambda_{i,k}\right)\alpha^j\beta^{k-j}.$$

如果$\forall 0 \leqslant j \leqslant k, \sum_{i=0}^{k-j} u^j v^{k-i-j}\sigma(\lambda_{i,k})\binom{k-i}{j} \pm \lambda_{i,k} = 0$,那么$\sigma(f_k) \pm f_k = 0$.如果至少存在1个$0 \leqslant j_0 \leqslant k$,使得

$$\sum_{i=0}^{k-j_0} u^{j_0} v^{k-i-j_0}\sigma(\lambda_{i,k})\binom{k-i}{j_0} \pm \lambda_{i,k} \neq 0,$$

那么$\sigma(f_k) \pm f_k$是k次齐次多项式.

根据差分方程等号的左边等于右边,得到方程左边的k次项等于右边的k次项,因此对于任何$0 \leqslant k \leqslant m$,$\sigma(f_k) \pm f_k = g_k$,$k > m$时,$\sigma(f_k) \pm f_k = 0$.

1.2　$\sigma(f)\pm f=g$的多项式解的次数

定理2　如果差分方程$\sigma(f)\pm f=g$存在多项式解,那么一定存在次数满足$\deg f=\deg g$的多项式解f.

证明　设$\deg g=m$,g的次数分解为$g=g_0+g_1+\cdots+g_m$.

根据定理1,如果差分方程$\sigma(f)\pm f=g$有多项式解f,那么f的次数分解满足方程式(6).设$f'=f_0+f_1+\cdots+f_m$,显然f'是一个满足$\deg f'=\deg g$的多项式解.

例1　计算差分方程$\sigma(f)+f=F_n+F_{n+1}$的多项式解f,其中F_n是斐波那契数列.

可将F_n看作α,F_{n+1}看作β,$u=1$,$v=1$,$\sigma(\alpha)=\beta$,$\sigma(\beta)=\alpha+\beta$,即求差分方程$\sigma(f)+f=\alpha+\beta$的多项式解,$a=b=1$.根据定理2,$\deg f=\deg g=1$.设$f=\lambda_1\alpha+\lambda_2\beta+\lambda_3$,$\sigma(f)=\lambda_2\alpha+(\lambda_1+\lambda_2)\beta+\lambda_3$.待定系数法求多项式$f$的各项系数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2=1,\\ 2\lambda_3=0.\end{cases}$$

于是求得$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=0$,即$f=\alpha$,也就是差分方程$\sigma(f)+f=F_n+F_{n+1}$的多项式解$f=F_n$.

2　差分方程$a\sigma(f)+bf=g$($\deg a>0$, $\deg b>0$)的多项式解

2.1　差分方程多项式解存在

设$\deg g=m$,令$f_m^1=\sum_{i=0}^{m}f_i$,$f_m^2=\sum_{i=m+1}^{n}f_i$,其中$n>m$.将此问题分为2个情形进行讨论.

情形1　当$\deg a\neq\deg b$时,$a\sigma(f)$和bf的总次数不同,$\max\{\deg a,\deg b\}+\deg f=\deg g$,因此,$\deg g-\max\{\deg a,\deg b\}$为差分方程$a\sigma(f)+bf=g$($\deg a\neq\deg b$)多项式解的一个次数上界.

例2　求差分方程$(\alpha+\beta)\sigma(f)+\beta^2 f=2\alpha\beta^3+2\beta^3+4\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta$的多项式解.

$\deg a\neq\deg b$,由情形1结论可知

$$\deg f=\deg g-\max\{\deg a,\deg b\}=4-2=2.$$

设$f=c_1\alpha^2+c_2\beta^2+c_3\alpha\beta+c_4\alpha+c_5\beta+c_6$,代入差分方程,求得$c_3=2$,$c_1=c_2=c_4=c_5=c_6=0$.即$f=2\alpha\beta$.

情形2　当$\deg a=\deg b>0$时,确定差分方程多项式解的次数上界比较复杂,定理3和4只给出了多项式a、b为p次齐次多项式且差分方程有多项式解情况下的性质.

定理3　设$\deg g=m$,且多项式a、b为p次齐次多项式,多项式f是方程$a\sigma(f)+bf=g$的解当且仅当f的次数分解$f=f_{m-p}^1+f_{m-p}^2$满足

$$a\sigma(f_{m-p}^1)+bf_{m-p}^1=g,a\sigma(f_{m-p}^2)+bf_{m-p}^2=0,$$

其中$f_{m-p}^1=\sum_{i=0}^{m-p}f_i$,$f_{m-p}^2=\sum_{i=m-p+1}^{n}f_i$.　　(7)

证明　(1)必要性.如果f的次数分解$f=f_{m-p}^1+f_{m-p}^2$满足方程式(7),那么

$$a\sigma(f)+bf=a\sigma\left(f_{m-p}^1+f_{m-p}^2\right)+bf_{m-p}^1+f_{m-p}^2=$$
$$\left(a\sigma\left(f_{m-p}^1\right)+bf_{m-p}^1\right)+\left(a\sigma\left(f_{m-p}^2\right)+bf_{m-p}^2\right)=$$
$$g+0=g.$$

由此证明了$f=f_{m-p}^1+f_{m-p}^2$是差分方程$a\sigma(f)+bf=g$的一个多项式解.

(2)充分性.多项式f是方程$a\sigma(f)+bf=g$的解,f的次数分解$f=f_{m-p}^1+f_{m-p}^2$,

$$g=a\sigma(f)+bf=a\sigma\left(f_{m-p}^1+f_{m-p}^2\right)+b(f_{m-p}^1+f_{m-p}^2)=$$
$$\left(a\sigma\left(f_{m-p}^1\right)+bf_{m-p}^1\right)+\left(a\sigma\left(f_{m-p}^2\right)+bf_{m-p}^2\right),\quad(8)$$

多项式$a\sigma\left(f_{m-p}^2\right)+bf_{m-p}^2=0$或各项次数$>m$,而$\deg g=m$,根据方程式(8)左右两边相等,则必然有$a\sigma\left(f_{m-p}^1\right)+bf_{m-p}^1=g$,$a\sigma\left(f_{m-p}^2\right)+bf_{m-p}^2=0$.

定理4　设$\deg g=m$,且多项式a、b为p次齐次多项式,如果差分方程$a\sigma(f)+bf=g$存在多项式解,那么一定存在次数为$\deg f=m-p$的多项式解f.

证明　如果差分方程$a\sigma(f)+bf=g$存在多项式解,由定理3可得f的次数分解$f=f_{m-p}^1+f_{m-p}^2$满足方程式(7).由此可知,f_{m-p}^1是差分方程$a\sigma(f)+bf=g$的一个多项式解,并且$\deg f_{m-p}^1=m-p$.

例3　求解差分方程$a\sigma(f)+\beta f=\alpha^4+7\alpha^2\beta^2+\beta^4$.

代入模型中,$a=\alpha$,$b=\beta$,$g=\alpha^4+7\alpha^2\beta^2+\beta^4$,$p=\deg a=\deg b=1$,根据定理4可知,存在次数为$\deg f=\deg g-\deg b=4-1=3$的多项式解$f$.

设$f=c_1\alpha^3+c_2\alpha^2\beta+c_3\alpha\beta^2+c_4\beta^3+c_5\alpha\beta+c_6\alpha^2+c_7\beta^2+c_8\alpha+c_9\beta+c_{10}$,因为差分方程等号右边为4次齐次多项式,所以$f$中次数低于3的部分,即$f^*=c_5\alpha\beta+c_6\alpha^2+c_7\beta^2+c_8\alpha+c_9\beta+c_{10}$满足$a\sigma(f^*)+\beta f^*=0$,因此有$c_5=c_6=c_7=c_8=c_9=c_{10}=0$.

然后由待定系数法求得$c_1=-4$,$c_2=c_3=c_4=1$,即$f=-4\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$.

在本例中,计算满足定理条件的差分方程 $a\sigma(f)+bf=g$ 多项式解时,若多项式 g 为齐次多项式,则可先计算其通解 $a\sigma(f)+bf=0$,然后寻找 $m-p$ 次齐次的特解.

2.2 差分方程多项式解不存在

定理3和定理4只给出了 $a\sigma(f)+bf=g$ 存在多项式解时的性质,差分域 $(\mathbb{F}(\alpha,\beta),\sigma)$ 上并不是所有的差分方程 $a\sigma(f)+bf=g$ 都存在多项式解,下面例4就是多项式解不存在的一个简单例子.

例4 差分方程 $\sigma(f)+f=\alpha^2$ 的多项式解不存在,具体如下:

$a=1,b=1$,由定理2,若此差分方程存在多项式解,那么一定存在次数为2的多项式解.因方程右边为二次齐次多项式,故 f 应该是二次齐次的,设 $f=c_1\alpha^2+c_2\beta^2+c_3\alpha\beta$, 待定系数法求多项式 f 的各项系数 $c_1、c_2、c_3$,即

$$\begin{cases} c_1+c_2=1,\\ c_1+2c_2+c_3=0,\\ c_2+c_3=0. \end{cases}$$

此方程组无解,差分方程多项式解不存在.

同样地,$\beta\sigma(f)+\alpha f=\alpha^2$,$(\alpha+\beta)\sigma(f)+\beta f=\alpha^2$ 也不存在多项式解.表明,差分域 $(\mathbb{F}(\alpha,\beta),\sigma)$ 上差分方程 $a\sigma(f)+bf=g$ 存在多项式解的条件仍需进一步研究.在用待定系数法求解多项式解各项未知系数时,可用矩阵方程理论中系数矩阵与增广矩阵有相同的秩这一充要条件判断多项式解是否存在.

3 应用及符号求和

利用这类差分方程的多项式解和伸缩法,计算斐波那契序列与Apéry数的不定和,重点计算了斐波那契数列的求和.本节采用的方法需要选取恰当的 $a、b$,求得对应差分方程 $a\sigma(f)+bf=g$ 的多项式解,得到关于 $F_k、F_{k+1}$ 或 $A_k、A_{k+1}$ 的不定和,优越性在于只需求得特定差分方程的多项式解,便可直接得出求和结果.具体如下:

设 g_k 是关于 $F_k、F_{k+1}$ 的多项式,f_k 为差分方程 $g_k=a\sigma f_k+bf_k$ 的多项式解,由 σ 的定义可知 $\sigma f_k=f_{k+1}$,

(1)寻找多项式 f_k,使得 $g_k=\sigma f_k-f_k$,有

$$\sum_{k=0}^{n-1}g_k=\sum_{k=0}^{n-1}(\sigma f_k-f_k)=\sigma f_{n-1}-f_0=f_n-f_0. \quad (9)$$

(2)寻找多项式 f_k,使得 $g_k=\sigma f_k+f_k$,有

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k g_k=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(\sigma f_k+f_k)=$$
$$(-1)^{n-1}\sigma f_{n-1}+f_0=(-1)^{n-1}f_{n-1}+f_0. \quad (10)$$

(3)寻找多项式 f_k,使得 $g_k=m\sigma f_k-f_k$,有

$$\sum_{k=0}^{n-1}m^k g_k=\sum_{k=0}^{n-1}m^k(m\sigma f_k-f_k)=$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\{m^{k+1}\sigma f_k-m^k f_k\}=m^n f_n-f_0. \quad (11)$$

以上结论关键的步骤是寻找对应差分方程的多项式解,当 g 是 $F_k、F_{k+1}$ 或 $A_k、A_{k+1}$ 的多项式时,可以得到关于 $F_k、F_{k+1}$ 与 $A_k、A_{k+1}$ 的等式,可有如下应用.

3.1 方程式(9)应用

Greene和Wilf[9]考虑了斐波那契序列($F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$,$F_0=F_1=1$)不定和,形如 $\sum_{k=0}^{n}F_k^p$.这类差分方程的多项式解,可对 $\sum_{k=0}^{n}F_k^p$ 形式的求和进行计算,根据方程式(9)只需 $\sigma(f_k)-f_k=\alpha^p$ 的多项式解存在.取 $p=3$,对此方法进行演示,$p=4,5,\cdots$ 时,此方法仍然适用,但次数较大时,多项式解的计算较为复杂,待定系数法这一步的计算可借助Maple.

(1) $\sum_{k=0}^{n}F_k=F_{n+2}-1$,

(2) $\sum_{k=0}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$,

(3) $\sum_{k=0}^{n}F_k^3=-\frac{3}{2}F_{n+1}{}^3+\frac{3}{2}F_{n+1}F_{n+2}^2-\frac{1}{2}F_{n+2}^3+\frac{1}{2}$.

证明 $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$,$F_0=F_1=1$,将 F_k 看作 α,F_{k+1} 看作 β,有 $u=1,v=1$,在 $Q(\alpha,\beta)$ 上定义 σ 为 $\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=\alpha+\beta$.

(1)和(2)的证明与(3)类似,这里只证明(3).

先求差分方程 $\sigma(f_k)-f_k=\alpha^3$ 的多项式解,$a=1$,$b=-1$.由定理2可得 $\deg f=3$,然后用待定系数法,得到其一个多项式解为 $f_k=-\frac{3}{2}\alpha^3-\frac{1}{2}\beta^3+\frac{3}{2}\alpha\beta^2$,即 $f_k=-\frac{3}{2}F_k^3-\frac{1}{2}F_{k+1}^3+\frac{3}{2}F_kF_{k+1}^2$.

由方程式(9)可得

$$\sum_{k=0}^{n}F_k^3=\left(-\frac{3}{2}F_{n+1}^3-\frac{1}{2}F_{n+2}^3+\frac{3}{2}F_{n+1}F_{n+1}^2\right)-$$
$$\left(-\frac{3}{2}F_0^3-\frac{1}{2}F_1^3+\frac{3}{2}F_0F_1^2\right)=$$
$$-\frac{3}{2}F_{n+1}^3-\frac{1}{2}F_{n+2}^3+\frac{3}{2}F_{n+1}F_{n+1}^2+\frac{1}{2}.$$

3.2　方程式(10)应用

$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k F_k^m$ 类求和可由方程式(10)应用 $\sigma(f_k)+f_k=\alpha^m$ 的多项式解进行计算.注意到 $\sigma(f_k)+f_k=\alpha^2$ 没有多项式解,所以,$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k^2$ 无法用此方法计算,取 $m=1,3,4$,对方程式(10)的应用过程进行演示,$m=5,6,\cdots$ 时,仍可用此方法进行计算,但待定系数法求多项式解会更复杂,可在Maple中进行计算.

(1) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k=(-1)^{n-1}(2F_n-F_{n+1})+1$,

(2) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k^3=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}F_{n+1}^3-\frac{3}{2}F_k^2F_{n+1}-1$,

(3) $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k^4=(-1)^{n-1}(2F_{n+1}^4+2F_nF_{n+1}^3-3F_n^2F_{n+1}^2-10F_n^3F_{n+1}-F_n^4)-10$.

证明　$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$,$F_0=F_1=1$,将 F_k 看作 α,F_{k+1} 看作 β,有 $u=1$,$v=1$,在 $Q(\alpha,\beta)$ 上定义 σ 为 $\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=\alpha+\beta$.

(a)寻找多项式 f_k,使得 $\sigma(f_k)+f_k=\alpha$,求得 $f_k=2\alpha-\beta$,即 $f_k=2F_k-F_{k+1}$.

由方程式(10)可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k=(-1)^{n-1}f_n+f_0=(-1)^{n-1}(2F_n-F_{n+1})+1.$$

(b)寻找多项式 f_k,使得 $\sigma(f_k)+f_k=\alpha^3$,求得 $f_k=\frac{1}{2}\beta^3-\frac{3}{2}\alpha^2\beta$,即 $f_k=\frac{1}{2}F_{k+1}^3-\frac{3}{2}F_k^2F_{k+1}$.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k^3=(-1)^{n-1}\frac{1}{2}F_{n+1}^3-\frac{3}{2}F_k^2F_{n+1}-1.$$

(c)寻找多项式 f_k,使得 $\sigma(f_k)+f_k=\alpha^4$,求得 $f_k=2\beta^4+2\alpha\beta^3-3\alpha^2\beta^2-10\alpha^3\beta-\alpha^4$,

$$f_k=2F_{k+1}^4+2F_kF_{k+1}^3-3F_k^2F_{k+1}^2-10F_k^3F_{k+1}-F_k^4.$$

由方程式(10)得

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k F_k^4=(-1)^{n-1}f_n+f_0=(-1)^{n-1}(2F_{n+1}^4+2F_nF_{n+1}^3-3F_n^2F_{n+1}^2-10F_n^3F_{n+1}-F_n^4)-10.$$

3.3　方程式(11)应用

$\sum_{k=0}^{n}m^k F_k^p(m,p\in N^*)$ 类求和可应用 $m\sigma(f_k)-f_k=\alpha^p$ 的多项式解进行计算.根据方程式(11)求解 $m=2$,即 $\sum_{k=0}^{n}2^k F_k^p$ 形式求和,取 $p=1,2,3$ 进行演示,$p=4,5,\cdots$ 时,仍可用此方法进行计算,但多项式解计算量大.

(1) $\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k=2^n(-\frac{1}{5}F_n+\frac{2}{5}F_{n+1})-\frac{1}{5}$,

(2) $\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k^2=2^n(F_n^2+F_{n+1}^2-\frac{3}{2}F_nF_{n+1})-\frac{1}{2}$,

(3) $\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k^3=\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k^3=2^n(\frac{17}{11}F_n^3+\frac{14}{11}F_{n+1}^3+\frac{12}{11}F_n^2F_{n+1}-\frac{36}{11}F_nF_{n+1}^2)-\frac{7}{11}$.

证明　$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$,$F_0=F_1=1$,将 F_k 看作 α,F_{k+1} 看作 β,有 $u=1$,$v=1$,在 $Q(\alpha,\beta)$ 上定义 σ 为 $\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=\alpha+\beta$.

(a) 寻找多项式 f_k,使得 $2\sigma(f_k)-f_k=\alpha$,求得 $f_k=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5}\beta$,即 $f_k=-\frac{1}{5}F_k+\frac{2}{5}F_{k+1}$.

由方程式(11)得:

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k=2^n(-\frac{1}{5}F_n+\frac{2}{5}F_{n+1})-\frac{1}{5}.$$

(b) 寻找多项式 f_k,使得 $2\sigma(f_k)-f_k=\alpha^2$,求得 $f_k=\alpha^2+\beta^2-\frac{3}{2}\alpha\beta$, 即 $f_k=F_k^2+F_{k+1}^2-\frac{3}{2}F_kF_{k+1}$,

由方程式(11)得

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k^2=2^n(F_n^2+F_{n+1}^2-\frac{3}{2}F_nF_{n+1})-\frac{1}{2}.$$

(c)寻找多项式 f_k,使得 $2\sigma(f_k)-f_k=\alpha^3$,求得 $f_k=\frac{17}{11}\alpha^3+\frac{14}{11}\beta^3+\frac{12}{11}\alpha^2\beta-\frac{36}{11}\alpha\beta^2$,即 $f_k=\frac{17}{11}F_k^3+\frac{14}{11}F_{k+1}^3+\frac{12}{11}F_k^2F_{k+1}-\frac{36}{11}F_kF_{k+1}^2$.

由方程式(11)得

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k F_k^3=2^n(\frac{17}{11}F_n^3+\frac{14}{11}F_{n+1}^3+\frac{12}{11}F_n^2F_{n+1}-\frac{36}{11}F_nF_{n+1}^2)-\frac{7}{11},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k(-F_k^2F_{k+1}+2F_{k+1}^3+2F_kF_{k+1}^2)=2^nF_n^2F_{n+1}-1.$$

将 F_k 看作 α,F_{k+1} 看作 β,在 $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ 上定义 σ 为 $\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=\alpha+\beta$.

寻找多项式 f_k,使得 $2\sigma(f_k)-f_k=-\alpha^2+2\beta^3+2\alpha\beta^2$ 有解.$a=\beta$,$b=\alpha$ 时,解为 $f_k=\alpha^2\beta$,即 $f_k=F_k^2F_{k+1}$.

由方程式(11)得

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^k(-F_k^2F_{k+1}+2F_{k+1}^3+2F_kF_{k+1}^2)=2^nF_n^2F_{n+1}-1.$$

3.4　符号求和

有关Apéry数的符号求和,本节中的方法也适用,但是其差分方程的多项式解不容易求出,经多

次尝试得

$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$,满足

$$A_{n+2}=\frac{(2n+3)(17n^2+51n+39)}{(n+2)^3}A_{n+1}-\frac{(n+1)^3}{(n+2)^3}A_n.$$

有下面等式成立

$$\sum_{k=0}^{n}\{(32k^3+147k^2+225k+115)A_{k+1}-(3k^2+3k+1)A_k\}=17(n+1)^3A_{n+1}-17n^3A_n-85.$$

证明 这是关于A_k、A_{k+1}的求和,将A_k看作α,A_{k+1}看作β,根据Apéry数的递推关系,在$\mathbb{Q}(k)(\alpha,\beta)$上定义$\sigma$为

$$\sigma|_{Q}=id,\sigma(k)=k+1,$$

$$\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=\frac{(2k+3)(17k^2+51k+39)}{(k+2)^3}\beta-\frac{(k+1)^3}{(k+2)^3}\alpha.$$

考虑$\sigma(f_k)-f_k=(32k^3+147k^2+225k+115)\beta-(3k^2+3k+1)\alpha$的多项式解,由定理2可知$\deg f_k=1$.求得

$f_k=17(k+1)^3\beta-17k^3\alpha$, 即 $f_k=17(k+1)^3A_{k+1}-17k^3A_k$.

$$\sum_{k=0}^{n}\{(32k^3+147k^2+225k+115)A_{k+1}-(3k^2+3k+1)A_k\}=17(n+1)^3A_{n+1}-17n^3A_n-17A_1=17(n+1)^3A_{n+1}-17n^3A_n-85.$$

4 结束语

Karr考虑差分域$(\mathbb{F},\sigma)$的延拓$(\mathbb{F}(t),\sigma)$,满足一阶(非齐次)递推的序列可用该模型来描述.本文引入二元差分域$(\mathbb{F}(\alpha,\beta),\sigma)$,$\sigma$是域$\mathbb{F}(\alpha,\beta)$上满足$\sigma(\alpha)=\beta,\sigma(\beta)=u\alpha+v\beta$的域同构,其中$u$、$v\neq 0$,来描述满足二阶线性递推关系的序列.因为差分方程的有理解通过估计万有分母可转化为多项式解,所以研究差分域$(\mathbb{F}(\alpha,\beta),\sigma)$上差分方程的多项式解是研究其有理解、超几何解等的基础.后续将继续研究一般差分方程$a\sigma f+bf=g$的多项式解次数上界,以及一般情形($\deg a\neq 0$, $\deg b\neq 0$)的应用.

参 考 文 献

[1] KARR M. Summation in finite terms[J]. Journal of the ACM,1981,28(2):305-350.

[2] KARR M. Theory of summation in finite terms[J]. Journal of Symbolic Computation,1985,1(3):303-315.

[3] PETKOVŠEK M, WILF H S, ZEILBERGER D. A=B[M]. Massachusetts:Wellesley,1996.

[4] ABRAMOV S A. Problems in computer algebra that are connected with a search for polynomial solutions of linear differential and difference equations[J]. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics,1989(3):63-68.

[5] PETKOVŠEK M. Hypergeometric solutions of linear recurrences with polynomial coefficients[J]. Journal of Symbolic Computation,1992,14(2/3):243-264.

[6] ABRAMOV S A,BRONSTEIN M,PETKOVŠEK M. On polynomial solutions of linear operator equations[C]// Issac Conference Committee. Proceedings of the 1995 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: Association for Computing Machinery,1995:290-296.

[7] ABRAMOV S A,BARKATOU M A. Rational solutions of first order linear difference systems[C]//Issac Conference Committee. Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: Association for Computing Machinery,1998:124-131.

[8] 余江涛,柳银萍.一个求非线性差分方程所有多项式解的算法(英文)[J].华东师范大学学报(自然科学版),2020(1):24-39.

[9] GREENE C,WILF H. Closed form summation of C-finite sequences[J]. Transactions of the American Mathematical Society,2007,359(3):1161-1189.

(责任编辑:马田田)