**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2022.01.001
**文献引用**:吕新莹. Hardy空间上的复对称$C_0$-半群[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2022,43(1):1-6. LYU X Y. Complex symmetric $C_0$-semigroups on Hardy space[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2022,43(1):1-6.

# Hardy空间上的复对称$C_0$-半群*

吕　新　莹

(天津大学数学学院，天津　300354)

**摘要**:本文研究了单位圆盘上Hardy空间中的强连续加权复合算子半群的$C_1$-对称性,这里$C_1:=A_{u,v}$是由$u,v$诱导的共轭算子,其中$u(z)=\beta, v(z)=\alpha z, |\beta|=1, |\alpha|=1$,并且给出了$C_1$-对称的强连续加权复合算子半群的具体形式.

**关键词**:复对称$C_0$-半群;加权复合算子;Hardy空间
**中图分类号**:O1-0;O143

# Complex symmetric $C_0$-semigroups on Hardy space*

LYU Xinying

(School of Mathematics, Tianjin University, Tianjin　300354)

**Abstract**: This paper considers the $C_1$-symmetry of strongly continuous semigroups of weighted composition operators on Hardy space in the unit disk, where $C_1:=A_{u,v}$ is a conjugation with $u$ and $v$ of the form $u(z)=\beta, v(z)=\alpha z, |\beta|=1, |\alpha|=1$, and gives the concrete forms of the $C_1$-symmetric strongly continuous semigroups of weighted composition operators.

**Keywords**: complex symmetric $C_0$-semigroups; weighted composition operators; Hardy space
**CLC**: O1-0; O143

## 0　引　言

设$D=\{z:|z|<1\}$为复平面$C$内的开单位圆盘,$D$的边界记为$\partial D$. $D$上的Hardy空间是满足如下条件的$D$上的解析函数的全体:

$$\|f\|_{H^2}^2=\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi}<\infty.$$

令$\psi$是$D$上的全纯函数,$\phi$是$D$上的解析自映射,对于$\forall f\in H^2(D), z\in D, \psi, \phi$诱导出$H^2(D)$上的一个线性加权复合算子$W_{\psi,\phi}$,定义如下

$$W_{\psi,\phi}f(z)=\psi(z)\cdot f(\phi(z)),$$

当$\psi\equiv 1$时,加权复合算子$W_{\psi,\phi}$便是复合算子$C_\phi$.

本文主要研究Hardy空间上的复对称$C_0$-半群,先给出一些基本定义和概念.

**定义 0.1**　设$(T(t))_{t\geqslant 0}$是Banach空间$X$上的一族有界线性算子,若满足:

(1)$T(0)=I$,其中$I$为$X$上的恒等算子;

(2)$T(t+s)=T(t)T(s), \forall t, s\geqslant 0$;

(3)$\lim\limits_{t\to 0}T(t)x=x, \forall x\in X$.

则称$(T(t))_{t\geqslant 0}$是$X$上的强连续算子半群或$C_0$-半群.其中,条件(3)表示$(T(t))_{t\geqslant 0}$是强连续的.

**定义 0.2**　设$(\phi_t)_{t\geqslant 0}$是单位圆盘$D$上的一族解析自映射,若$(\phi_t)_{t\geqslant 0}$满足:

(1)$\phi_0(z)=z$,对于$\forall z\in D$;

收稿日期:2021-01-13
*国家自然科学基金项目(11771323)

(2)$\phi_{t+s}(z)=\phi_t\left(\phi_s(z)\right)$,对于$\forall t,s\geqslant 0,z\in D$;

(3)$(t,z)\to\phi_t(z)$在$[0,+\infty)\times D$上连续.

则称$\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$是$D$上的一个单参数连续解析自映射半群(简称半群).

**注** 为了方便讨论,先列举域$\Omega\subset C$内的解析自映射半群的2个性质,会在下文一直使用:(1)对于所有$t\geqslant 0$,映射$z\mapsto\phi_t(z)$是单射;(2)对于所有$z\in\Omega$,映射$t\mapsto\phi_t(z)\in\Omega,t\in(0,+\infty)$是解析的.关于更多解析自映射半群性质的介绍见文献[1].

**定义 0.3** 设$\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$为半群,若存在$\left(\psi_t\right)_{t\geqslant 0}$是$D$上的一族全纯函数,且满足$\psi_0(z)=1,\psi_{t+s}(z)=\psi_t(z)\cdot\psi_s\left(\phi_t(z)\right),z\in D,t,s\geqslant 0$,使得

$$\left(T(t)f\right)(z)=\psi_t(z)f\left(\phi_t(z)\right),f\in H^2(D),t\geqslant 0,$$

则称$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$是$H^2(D)$上的一族加权复合算子半群,此时若$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$满足定义0.1中的条件(3),则称$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$为强连续加权复合算子半群.

**定义 0.4** 设$H$是一个可分的Hilbert空间,$C$是$H$到自身的映射.若$C$满足:

(1)$C(\lambda x+\mu y)=\overline{\lambda}C(x)+\bar{\mu}C(y),\forall x,y\in H,\lambda,\mu\in C$;

(2)$C^2=I$;

(3)$\left\langle Cx,Cy\right\rangle=\left\langle y,x\right\rangle,\forall x,y\in H.$

则称$C$是$H$上的一个共轭.设$T$为$H$上的有界线性算子,若存在$H$上的一个共轭$C$使得$T=CT^*C$,则称$T$是复对称算子.

**定义 0.5**[2] 设$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$为$H$上的$C_0$-半群,若存在一个与$t$无关的共轭$C$使得$T(t)=CT(t)^*C,\forall t\geqslant 0$,则称$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$是$C$-对称的$C_0$-半群.

下面给出分式线性映射的定义和分类.

分式线性映射是形如

$$\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ ad-bc\neq 0$$

的映射.若存在$z_0\in D$,有$\phi\left(z_0\right)=z_0$,则称$z_0$是$\phi(z)$的不动点.若$\phi(z)$在$D$内没有不动点,则存在$\tau\in\partial D$满足$\phi(\tau)=\tau$,且$\left\langle \mathrm{d}\phi_\tau(\tau),\tau\right\rangle=\alpha_1(\phi),0<\alpha_1\leqslant 1$.其中$\tau$称为$\phi$的Denjoy-Wolff点,$\mathrm{d}\phi_\tau$为映射$\phi$在点$\tau$处的微分,也称为切映射,$\alpha_1(\phi)$是$\phi$的边界伸缩系数.

根据其不动点的位置与个数可知$D$上的分式线性映射半群$\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$分为以下3种类型[1]:

(1)如果$\phi_1$在$D$内有唯一的不动点,那么$\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$就叫做一个椭圆型分式线性映射半群;

(2)如果$\phi_1$在$D$内没有不动点,$\tau\in\partial D$是$\phi_1$的Denjoy-Wolff点,若$\phi_1$是双曲型的分式线性映射,那么$\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$就叫做一个双曲型分式线性映射半群;

(3)如果$\phi_1$在$D$内没有不动点,$\tau\in\partial D$是$\phi_1$的Denjoy-Wolff点,若$\phi_1$是抛物型的分式线性映射,那么$\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$就叫做一个抛物型分式线性映射半群.

关于加权复合算子半群的复对称性的研究历史并不是很长,最早是Hai和Khoi[2]提出了复对称$C_0$-半群的概念,并进一步刻画了Fock空间中加权复合算子的复对称$C_0$-半群;Wang和Han[3]研究了右半平面上Bergman空间中的加权复合算子的复对称$C_0$-半群.迄今为止,对加权复合算子的复对称$C_0$-半群的研究结果并不多,甚至连经典的$H^2(D)$上关于加权复合算子的复对称$C_0$-半群还没有给出刻画.

对于Hilbert空间上加权复合算子的复对称性的研究,目前已经有了比较完整的结论.最早是Jung等[4]给出了Hardy空间上关于特殊共轭$Jf(z)=\overline{f\left(\overline{z}\right)}$复对称的加权复合算子的具体形式;Hai和Khoi[5]给出了Fock空间上关于更一般的共轭$A_{u,v}f(z)=u(z)\overline{f\left(\overline{v(z)}\right)},f\in F^2(\mathrm{C})$复对称的加权复合算子的具体形式;Lim和Khoi[6]研究了Hardy空间上关于一般共轭复对称的加权复合算子,并将其分为了$C_1$-对称和$C_2$-对称2类,关于$C_1$-对称的结果见定理0.1.

本文根据单位球上分式线性映射半群的不动点的位置及个数对分式线性映射半群进行分类的结果[1,7-8],结合定义0.1给出$H^2(D)$上加权复合算子关于$C_1$-对称时的形式,完整地刻画了$H^2(D)$上$C_1$-对称的强连续加权复合算子半群的具体形式.

下面定理给出$H^2(D)$上加权复合算子关于$C_1$-对称时的具体形式.

**定理 0.1**[6] 令$\psi$是$D$上的全纯函数,$\phi$是$D$上的解析自映射,使得加权复合算子$W_{\psi,\phi}$满足$W_{\psi,\phi}:H^2(D)\to H^2(D)$,设$C_1:=A_{u,v}$是由$u,v$诱导的共轭算子,其中$u(z)=\beta,v(z)=\alpha z,\alpha,\beta\in\partial D$.则$W_{\psi,\phi}$是$C_1$-对称的当且仅当$\psi(z)=\dfrac{d}{\left(1-\alpha C_0 z\right)},\phi(z)=C_0+$

$\frac{C_1 z}{1-\alpha C_0 z}, \forall z \in D$,其中,$C_0, C_1 \in D, d \in \mathrm{C}$.

结合定义 0.1 以及强连续加权复合算子半群的定义 0.3,易得如下结论.

**引理 0.1**　设 $C_1 := A_{u,v}$ 是由 $u, v$ 诱导的共轭算子,这里 $u(z)=\beta, v(z)=\alpha z, \beta, \alpha \in \partial D$,若 $\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$ 是 $H^2(D)$ 空间上 $C_1$-对称的强连续加权复合算子半群,定义为 $\left(T(t)f\right)(z)=\psi_t(z) f\left(\phi_t(z)\right), f \in H^2(D)$. 则 $\left(\phi_t\right)_{t\geqslant 0}$、$\left(\psi_t\right)_{t\geqslant 0}$ 分别满足如下形式:$\phi_t(z)=C_{0t}+\frac{C_{1t} z}{1-\alpha C_{0t} z}$ 是 $D$ 上的一个半群,$\psi_t(z)=\frac{d_t}{1-\alpha C_{0t} z}$,满足 $\psi_0(z)=1$,$\psi_{t+s}(z)=\psi_t(z)\cdot\psi_s\left(\phi_t(z)\right), z \in D, t, s \geqslant 0$,这里 $C_{0t} \in D, C_{1t} \in D, d_t \in C$.

## 1　主要结论及证明

下面定理是本文的核心结论.对于 $H^2(D)$ 上 $C_1$-对称的强连续加权复合算子半群,不妨假设 $\phi_t(z)$ 为非常值分式线性映射,若 $\phi_t(z)$ 恒为常数,结论显然.

**定理 1.1**　设 $C_1 := A_{u,v}$ 是由 $u, v$ 诱导的共轭算子,这里 $u(z)=\beta, v(z)=\alpha z, \alpha, \beta \in \partial D$. $\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$ 是 $H^2(D) \to H^2(D)$ 的强连续加权复合算子半群,则 $\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$ 是 $C_1$-对称的当且仅当以下任一条件成立:

(1)
$$\phi_t(z)=\frac{[a-ka^2(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-\mathrm{e}^{\lambda t}a]+[ka(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-|a|^2+\mathrm{e}^{\lambda t}]z}{[1-ka(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}]+[k(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}]z},$$
$$\psi_t(z)=\frac{(d)^t\left(1-ka(1-\mathrm{e}^{\lambda})-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda}\right)^t}{\left(1-|a|^2\right)^{t-1}[1-ka(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}+\left(k(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}\right)z]},$$
$\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, $k=\frac{\bar{a}-a\alpha}{1-a^2\alpha}$, $\left|\phi_{\bar{a}}(k)\right|=|a|$, $d \in C$, $a \in D$ 是 $\phi_t(z)$ 的内部不动点;

(2)
$$\phi_t(z)=\frac{a^2(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)(1+c)+(\mathrm{e}^{\lambda t}-\mathrm{e}^{\lambda t}c+c+1)az}{a(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1)+(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)(1-c)z},$$
$$\psi_t(z)=\frac{2d^t(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}c-c+1)^t a}{a(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1)+(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)(1-c)z},$$
$\mathrm{Re}c=0, d \in C, \lambda>0$, $a \in \partial D$ 是 $\phi_t(z)$ 的 Denjoy-Wolff 点且 $a^2=\frac{(c-1)}{\alpha(c+1)}$;

(3)
$$\phi_t(z)=\frac{a^2ct+a(2-ct)z}{a(ct+2)-ctz},$$
$$\psi_t(z)=\frac{2d^t(2+c)^t a}{a(2+ct)-ctz},$$
$\mathrm{Re}c \geqslant 0, d \in C$, $a \in \partial D$ 是 $\phi_t(z)$ 的 Denjoy-Wolff 点且 $a^2=\frac{1}{\alpha}$.

**注**　对比于引理 0.1,当 $\phi_t(z)$ 的内部不动点 $a=0$ 时,对于 $\forall \alpha, \beta \in \partial D$,$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$ 满足条件(1),是 $C_1$-对称的;当 $\phi_t(z)$ 的内部不动点 $a \neq 0$ 且 $a \in D$ 时,对于 $\forall \beta \in \partial D$,只有当 $\alpha=\frac{\bar{a}-k}{a-ka^2}$ 时,$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$ 满足条件(1)是 $C_1$-对称的;当 $\phi_t(z)$ 无内部不动点时,对于 $\forall \beta \in \partial D$,只有当 $\alpha=\frac{(c-1)}{a^2(c+1)}$ 或 $\alpha=\frac{1}{a^2}$ 时,$\left(T(t)\right)_{t\geqslant 0}$ 满足条件(2)或(3)是 $C_1$-对称的.

接下来,根据 $D$ 上分式线性映射半群的类型,分 3 种情况来证明定理 1.1 的充分性.

**引理 1.1**　若 $\phi_t(z)$ 与 $\psi_t(z)$ 满足引理 0.1 的条件,且 $\left(\phi_t\right)$ 是以 $a$ 为不动点的椭圆型分式线性映射半群,则有
$$\phi_t(z)=\frac{[a-ka^2(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-\mathrm{e}^{\lambda t}a]+[ka(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-|a|^2+\mathrm{e}^{\lambda t}]z}{[1-ka(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}]+[k(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}]z},$$
$$k=\frac{\bar{a}-a\alpha}{1-a^2\alpha}, \left|\phi_{\bar{a}}(k)\right|=|a|,$$
$$\psi_t(z)=\frac{(d)^t\left(1-ka(1-\mathrm{e}^{\lambda})-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda}\right)^t}{\left(1-|a|^2\right)^{t-1}[1-ka(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}+\left(k(1-\mathrm{e}^{\lambda t})-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}\right)z]},$$
$\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0, d \in C$.

**证明**　当 $\phi_t(z)$ 有内部不动点 $a \neq 0$ 时,令 $\zeta_t=\phi_a \circ \phi_t \circ \phi_a$,于是有 $\xi_t(0)=0$,其中 $\phi_a(z)=\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$,从而 $\zeta_t(z)=\frac{A_t z}{B_t z+1}, A_t, B_t \in C$.

由半群性质 $\zeta_{t+s}=\zeta_t\left(\zeta_s\right)$ 可得 $\frac{A_{t+s}z}{B_{t+s}z+1}=\frac{A_t\frac{A_s z}{B_s z+1}}{B_t\frac{A_s z}{B_s z+1}+1}=\frac{A_t A_s z}{B_t A_s z+B_s z+1}$,从而有 $A_{t+s}=A_t A_s, B_{t+s}=B_t A_s+B_s, A_0=1, B_0=0$.

因为$\left(\zeta_t\right)_{t\geqslant 0}$是半群,则存在$\lambda$,使得$A_t=\mathrm{e}^{\lambda t}$,由施瓦兹引理有$\mathrm{Re}\lambda\leqslant 0$(也可参考文献[1]的引理3.1).

对于$B_{t+s}=B_tA_s+B_s$,两边关于$s$求微分,并令$s=0$得

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t}=\lambda B_t+V_0,\ V_0=\frac{\mathrm{d}B_t}{\mathrm{d}t}\Big|t=0.$$

根据$B_0=0$可解得$B_t=\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)\cdot\frac{V_0}{\lambda}$. 记$k=\frac{V_0}{\lambda}$,则有$\zeta_t(z)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}z}{\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)\cdot kz+1}$.

此时

$$\phi_t(z)=\phi_a\circ\zeta_t\circ\phi_a(z)=\phi_a\left(\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}{1-k\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)\frac{a-z}{1-\bar{a}z}}\right)=\frac{a-\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}(a-z)}{(1-\bar{a}z)-k\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)(a-z)}}{1-\bar{a}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}(a-z)}{(1-\bar{a}z)-k\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)(a-z)}},$$

整理得

$$\phi_t(z)=\frac{[a-ka^2\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-\mathrm{e}^{\lambda t}a]+[ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2+\mathrm{e}^{\lambda t}]z}{[1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}]+[k\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}]z}.$$

令$z=0$,有$C_{0t}=\phi_t(0)=\frac{a-ka^2\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-a\mathrm{e}^{\lambda t}}{1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}}$,

经计算易得$\alpha=\frac{\bar{a}-k}{a-ka^2}$,

$$C_{1t}=\frac{ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2+\mathrm{e}^{\lambda t}}{1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}}+\frac{\bar{a}-k}{a-ka^2}\left(\frac{a-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-a\mathrm{e}^{\lambda t}}{1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}}\right)^2=\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}\left(1-|a|^2\right)^2}{\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}\right)^2}=\phi_t'(0),$$

此时

$$\psi_t(z)=\frac{d_t}{1-\alpha C_{0t}z}=\frac{d_t\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}\right)}{1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}+[k\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}]z},$$

又因为$\alpha\in\partial D$,因此$|\alpha|=\left|\frac{\bar{a}-k}{a-ka^2}\right|=1$,则有$k=\frac{a-\alpha a}{1-\alpha a^2}$且$k$满足$\left|\phi_{\bar{a}}(k)\right|=|a|$.

现在问题转化为计算$d_t$的形式,记$h_t=d_t\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}\right)$,根据$\psi_{t+s}(z)=\psi_t\cdot\psi_s\left(\phi_t(z)\right)$,令$z=a$可得$\frac{h_{t+s}}{\left(1-|a|^2\right)}=\frac{h_th_s}{\left(1-|a|^2\right)^2}$,即$\frac{h_th_s}{h_{t+s}}=\left(1-|a|^2\right)$,$h_0=1-|a|^2$,$d_0=1$. 当$f$恒为常数,$z$为0时,由$\left\{T_t\right\}$的强连续性可知$d_t$是连续的,从而$h_t$连续.

事实上,对于连续函数$f$,若$f(m)f(n)=lf(m+n)$,则当$m$为整数时,有$f(m)=\frac{\left(f(1)\right)^m}{l^{m-1}}$;当$m$为有理数时,有$f(m)=\frac{\left(f(1)\right)^m}{l^{m-1}}$;当$m$为无理数时,由连续性有$f(m)=\frac{\left(f(1)\right)^m}{l^{m-1}}$,所以,对于$\forall m,n\geqslant 0$,$f(m)=\frac{\left(f(1)\right)^m}{l^{m-1}}$. 因此$h_t=\frac{\left(h_1\right)^t}{\left(1-|a|^2\right)^{t-1}}$.

接下来将$h_t=d_t\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}\right)$代入有$d_t=\frac{\left(d_1\right)^t\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda}\right)^t}{\left(1-|a|^2\right)^{t-1}\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}\right)}$,$d_1\in C$,此时$\psi_t(z)=\frac{\left(d_1\right)^t\left(1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda}\right)^t}{\left(1-|a|^2\right)^{t-1}\left[1-ka\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-|a|^2\mathrm{e}^{\lambda t}+\left(k\left(1-\mathrm{e}^{\lambda t}\right)-\bar{a}+\bar{a}\mathrm{e}^{\lambda t}\right)z\right]}$.

特别地,当$a=0$时,有$\phi_t(z)=C_{1t}z$,则存在$\lambda$,$\mathrm{Re}\lambda\leqslant 0$使得$\phi_t(z)=\mathrm{e}^{\lambda t}z$. 此时$C_{0t}=\phi_t(0)=0$,$C_{1t}=\mathrm{e}^{\lambda t}$,$\alpha\in\partial D$且$\psi_t(z)=d_t$,又由$\psi_{t+s}(z)=\psi_t\cdot\psi_s\left(\phi_t(z)\right)$得,$d_{t+s}=d_td_s$,由上述证明过程可知$d_t=\left(d_1\right)^t$,$d_1\in C$,$\psi_t(z)=d_1{}^t$;当$a=0$时,$k=0$. 综合以上2种情况令$d=d_1$即证.

**引理1.2** 若$\phi_t(z)$与$\psi_t(z)$满足引理0.1的条件,且$\left(\phi_t\right)$是双曲型分式线性映射半群,设$a$为其Denjoy-Wolff点,则有$a^2=\frac{(c-1)}{\alpha(c+1)}$,

$$\phi_t(z)=\frac{a^2\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1+c)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-\mathrm{e}^{\lambda t}c+c+1\right)az}{a\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z},$$

$$\psi_t(z)=\frac{2d^t\left(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}c-c+1\right)^ta}{a\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z},$$

$$\mathrm{Re}c=0,d\in C,\lambda>0.$$

**证明**　设 $\phi(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 且 $\phi(1)=1$, 则 $a+b=c+d$.此时 $\phi'(1)=\dfrac{a-c}{c+d}=\alpha_1$,令 $\phi^0=\sigma\circ\phi\circ\sigma^{-1}$,其中 $\sigma:D\to H,\sigma(z)=\dfrac{1-z}{1+z}$为凯莱变换,$H$为右半平面,易得

$$\phi^0(z)=\sigma\left(\frac{a\dfrac{1-z}{1+z}+b}{c\dfrac{1-z}{1+z}+d}\right)=\frac{1-\dfrac{a(1-z)+b(1+z)}{c(1-z)+d(1+z)}}{1+\dfrac{a(1-z)+b(1+z)}{c(1-z)+d(1+z)}}=\frac{(a-c)z}{c+d+(b-c)z},$$

分式上下同时除以 $c+d$ 有 $\phi^0(z)=\dfrac{\alpha_1 z}{1+\dfrac{b-c}{c+d}z}$, 记 $h=\dfrac{b-c}{c+d}$, 有 $\phi^0(z)=\dfrac{\alpha_1 z}{1+hz}$. 此时令 $G:H\to H$, $G(z)=\dfrac{1}{z}$, $\phi^1(z)=G\circ\phi^0\circ G^{-1}(z)$.此时 $\phi^1:H\to H$, 且有

$$\phi^1(z)=G\left(\frac{\alpha_1\dfrac{1}{z}}{1+h\dfrac{1}{z}}\right)=G\left(\frac{\alpha_1}{z+h}\right)=\frac{1}{\alpha_1}(z+h).$$

注意到 $\phi^1(H)\subseteq H$ 且 $\phi^1$ 在 $\overline{H}$ 上连续,所以 $\phi^1(\partial H)\subset\overline{H}$, 因此取 $z=\mathrm{i}r, r\in R$,$R$为实数.根据 $\alpha_1>0$ 可得 $\mathrm{Re}h\geqslant 0$.此时对于 $D$ 上的双曲型分式线性自映射半群,当其边界不动点为 1 时,由文献[1]的定理 1.5 或 5.1 可知 $\exists\lambda>0$ 使得,$\alpha_1\left(\phi(t)\right)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$,且由上述证明可知 $\phi_t=\sigma^{-1}\circ G^{-1}\circ\phi_t^1\circ G\circ\sigma$, 其中 $\phi_t^1(z)=\mathrm{e}^{\lambda t}\left(z+h_t\right)$, $\mathrm{Re}h_t\geqslant 0$.

因为 $\phi_t^1(z)$ 为右半平面 $H$ 上的半群,根据半群的定义有

$$\phi_{t+s}^1(z)=\mathrm{e}^{\lambda(t+s)}\left(z+h_{t+s}\right)=\mathrm{e}^{\lambda t}\left(\mathrm{e}^{\lambda s}\left(z+h_s\right)+h_t\right)=\mathrm{e}^{\lambda(t+s)}z+\mathrm{e}^{\lambda(t+s)}h_s+\mathrm{e}^{\lambda t}h_t=\phi_t^1\circ\phi_s^1(z),$$

即 $h_{t+s}=h_s+\mathrm{e}^{-\lambda s}h_t$, $h_0=0$,解得 $h_t=\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)c$,因此

$$\phi_t^1(z)=\mathrm{e}^{\lambda t}\left(z+\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)c\right),$$

注意到 $\mathrm{Re}h_t\geqslant 0$,则有 $\mathrm{Re}c\geqslant 0$.

接下来根据 $\phi_t=\sigma^{-1}\circ G^{-1}\circ\phi_t^1\circ G\circ\sigma$, 将 $G(z)$、$\sigma(z)$ 等代入经计算易得

$$\phi_t(z)=\frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1+c)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-\mathrm{e}^{\lambda t}c+c+1\right)z}{\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z}.$$

对于更一般的情形 $a\in\partial D$,存在 $\zeta_t(z)=a^{-1}\phi_t(az)$, 以 1 为不动点,即

$$\zeta_t(z)=\frac{\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1+c)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-\mathrm{e}^{\lambda t}c+c+1\right)z}{\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z},$$

$$\phi_t(z)=a\zeta_t\left(a^{-1}z\right)=\frac{a^2\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1+c)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-\mathrm{e}^{\lambda t}c+c+1\right)az}{a\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z},$$

且通过简单计算可得 $\phi_t(z)$ 有 2 个不相等的不动点 $a, a\dfrac{c+1}{c-1}$.

与引理 1.1 的证明类似,令 $z=0$ 得 $C_{0t}=\dfrac{a\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1+c)}{\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1}$, 进一步可得 $\alpha=\dfrac{(c-1)}{a^2(c+1)}$, $C_{1t}=\dfrac{4\mathrm{e}^{\lambda t}}{\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)^2}=\phi_t'(0)$. 又因为 $\alpha\in\partial D$, 因此 $\mathrm{Re}c=0$.此时 $\phi_t(z)$ 有 2 个不相等的边界不动点.将 $\alpha$ 和 $C_{0t}$ 代入 $\psi_t(z)$ 可得

$$\psi_t(z)=\frac{d_t\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+c\mathrm{e}^{\lambda t}-c+1\right)a}{a\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+c\mathrm{e}^{\lambda t}-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z}.$$

现在计算 $d_t$ 的形式,为方便起见,记 $h_t^1=d_t\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+c\mathrm{e}^{\lambda t}-c+1\right)$, 根据 $\psi_{t+s}(z)=\psi_t\cdot\psi_s\left(\phi_t(z)\right)$, 当 $z=a$ 时,有 $\dfrac{h_t^1h_s^1}{h_{t+s}^1}=2, h_0=2, d_0=1$,同引理 1.1 可得 $h_t^1=\dfrac{\left(h_1^1\right)^t}{2^{t-1}}$, $d_t=\dfrac{\left(d_1\right)^t\left(\mathrm{e}^{\lambda}+c\mathrm{e}^{\lambda}-c+1\right)^t}{2^{t-1}\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+c\mathrm{e}^{\lambda t}-c+1\right)}$, $d_1\in C$. 将 $d_t$ 代入 $\psi_t(z)$, 令 $d=\dfrac{d_1}{2}$, 则有

$$\psi_t(z)=\frac{2d^t\left(\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda}c-c+1\right)^ta}{a\left(\mathrm{e}^{\lambda t}+\mathrm{e}^{\lambda t}c-c+1\right)+\left(\mathrm{e}^{\lambda t}-1\right)(1-c)z}.$$

综上,引理 1.2 得证.

**引理 1.3**　若 $\phi_t(z)$ 与 $\psi_t(z)$ 满足引理 0.1 的条件,且 $\left(\phi_t\right)$ 是抛物型分式线性映射半群,设 $a$ 为其 Denjoy-Wolff 点,则有 $a^2=\dfrac{1}{\alpha}$,

$$\phi_t(z)=\frac{a^2ct+a(2-ct)z}{a(ct+2)-ctz},\psi_t(z)=\frac{2d^t(2+c)^ta}{a(2+ct)-ctz},$$

$$\mathrm{Re}c\geqslant 0, d\in C.$$

**证明**　若 $\phi_t(z)$ 为抛物型分式线性映射半群,由文献[1]的定理 1.5 或 6.1 可知 $\alpha_1\left(\phi(t)\right)=1$.

当 $a=1$ 时,对引理 1.2 证明过程中的 $G,\sigma$, $\phi_t=\sigma^{-1}\circ G^{-1}\circ\phi_t^1\circ G\circ\sigma$. 此时 $\phi_t^1(z)=z+h_t$, 其中 $\mathrm{Re}h_t\geqslant 0$, 根据 $\phi_t^1(z)$ 的半群性质可得 $z+h_{t+s}=$

$z + h_s + h_t$，从而 $h_t = ct, \mathrm{Re}c \geqslant 0$，此时，$\phi_t(z) = \sigma^{-1} \circ G^{-1} \circ \phi_t^1 \circ G \circ \sigma(z) = \dfrac{ct + (2 - ct)z}{(ct + 2) - ctz}$.

对于一般情况，即以 $\forall a \in \partial D$ 为 Denjoy-Wolff 点的抛物型分式线性映射半群，令 $\zeta_t(z) = a^{-1}\phi_t(az)$，则有 $\zeta_t(1) = 1$，同引理1.2此时有

$$\phi_t(z) = \frac{a^2 ct + a(2 - ct)z}{a(ct + 2) - ctz}, C_{0t} = \frac{act}{2 + ct} = \phi_t(0),$$

$$\alpha = \frac{1}{a^2}, C_{1t} = \frac{4}{(2 + ct)^2} = \phi_t'(0).$$

将 $\alpha$ 和 $C_{0t}$ 代入 $\psi_t(z)$ 则有 $\psi_t(z) = \dfrac{d_t(2 + ct)a}{a(2 + ct) - ctz}$，$d_t$ 求法同上，有 $d_t = \dfrac{(d_1)^t(2 + c)^t}{2^{t-1}(2 + ct)}$，$d_1 \in C$，此时，$\psi_t(z) = \dfrac{(d_1)^t(2 + c)^t a}{2^{t-1}a(2 + ct) - 2^{t-1}ctz}$. 令 $d = \dfrac{d_1}{2}$，整理得 $\psi_t(z) = \dfrac{2d^t(2 + c)^t a}{a(2 + ct) - ctz}$.

综上，定理1.1充分性得证.下证必要性.

由充分性证明过程易得3种情况下的 $(T(t))_{t \geqslant 0}$ 是 $C_1$-对称的加权复合算子半群.由文献[9]中第Ⅰ部分的命题5.3知，强连续性显然成立.必要性得证.

## 参 考 文 献


[1] BRACCI F, CONTRERAS M D, DÍAZ-MADRIGAL S. Classification of semigroups of linear fractional maps in the unit ball[J]. Advances in Mathematics, 2007, 208(1): 318-350.

[2] HAI P V, KHOI L H. Complex symmetric $C_0$-semigroups on the Fock space[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 445(2): 1367-1389.

[3] WANG M F, HAN K K. Complex symmetric $C_0$-semigroups on $A^2(C^+)$[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2020, 36(10): 1171-1182.

[4] JUNG S, KIM Y, KO E, et al. Complex symmetric weighted composition operators on $H^2(D)$[J]. Journal of Functional Analysis, 2014, 267(2): 323-351.

[5] HAI P V, KHOI L H. Complex symmetry of weighted composition operators on the Fock space[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 433(2): 1757-1771.

[6] LIM R, KHOI L H. Complex symmetric weighted composition operators on $H_\gamma(D)$ [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 464(1): 101-118.

[7] BISI C, BRACCI F. Linear fractional maps of the unit ball: a geometric study[J]. Advances in Mathematics, 2002, 167(2): 265-287.

[8] BRACCI F, CONTRERAS M D, DÍAZ-MADRIGAL S. Infinitesimal generators associated with semi-groups of linear fractional maps[J]. Journal Danalyse Mathématique, 2007, 102(1): 119-142.

[9] ENGE K J, NAGE R. One-parameter semigroups for linear evolution equations[M]. New York: Springer-Verlag, 2000.


(责任编辑:马田田)