DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.01.004

中学数学中分类讨论思想的个案研究

李 云[1] 赵学志[2]

(1. 福州市鼓楼第二中心小学, 福建 福州 350001; 2. 首都师范大学数学科学学院,北京 100048)

摘 要

数学思想方法作为数学教育的重要内容,已引起人们的关注. 无论过去的教学大纲,还是现在的新课标,都把分类和整合作为重要的数学思想方法. 本文归纳总结了中学数学中常见的分类讨论因素和解题的基本步骤. 在中学的教学实践中,我们选取了 1 名对分类讨论出问题的学生作为个案研究,通过对该学生的知识诊断和矫正,使其掌握了对应的分类论问题.

关键词: 分类讨论,数学思想方法,个案研究.

中图分类号: G636. 3

1 分类讨论的界定和相关研究

在数学教育界,王仲春教授等认为: “数学思想是指人类关于数学对象和理性认知的过程,包括应用数学工具解决各种实际问题的思考过程[6]. ”朱成杰指出: “数学思想是人们对数学内容本质的认识,是对数学知识和数学方法的进一步抽象和概括. 而数学方法则是解决数学问题的手段. 若将数学思想与数学方法严格区分开来是困难的,因此人们统称为数学思想方法[7]. ”分类是揭示概念外延的一种逻辑方法.

在数学教学中,贯穿着数学知识和数学思想方法,基础知识是课堂上的一条明线,而数学思想方法则是的一条暗线. 学生走出校园后,通常几年后就遗忘了数学知识,而数学思想方法却铭刻在脑海中. 实际上,无论在哪一阶段的教学,培养数学思维能力一直都是教学的目标,而数学思想方法的学习,是培养和提高数学思维能力的过程. 在中学数学中,分类讨论就是一种重要的思想方法. 朱成杰指出: “数学的分类是,按照数学对象的相同点和差异点,将数学对象区分为不同种类的思想方法[7]. ”

不会正确分类就不可能学好数学,分类思想在中小学数学中非常有用. 通过对有关分类讨论思想方法的文献研究和分析,结合我们自身的教学经验,我们发现分类具有的三个要素: 被讨论的对象; 讨论后所得出的类概念; 分类的标准. 朱成杰指出,一个科学分类的标准必须能够把需要分类的数学对象,进行不重复,无遗漏的分划[7]. 下面就引起分类讨论的因素和分类讨论的解题步骤展开进行讨论.

1.1 引起分类讨论的因素

当我们遇到的问题中的条件不足以得到一个确定答案或无法求解时,就是要应用分类讨论的思想方法求解[2]. 在学生解答问题时候,如何才能找出正确分类的标准. 为此,我们研读了相关的文献并结合多年的教学经验,总结归纳引起分类讨论的因素[4].

中学教学中,引起分类讨论的因素很多,常规的方法有:

(1) 涉及的数学概念需要分类讨论;

如: 根据绝对值的定义,分三种情况; 由指数函数的定义,分两种情况.

(2) 根据某些数学定理、公式的限制条件或运算的要求进行分类讨论;

如: 等比数列的前项和计算时,分公比两种情况.

(3) 根据图形的位置变化进行分类讨论;

如: 考察圆相切的位置关系时,分内切和外切两种情况.

收稿日期: 2017-04-06

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(4) 根据实际情况分类讨论;

如: 概率问题中根据实际情况,要求分类求出基本事件.

(5) 当条件或结论不唯一时,需要分类讨论.

如: 给出等腰三角形时,需要讨论顶角与底角.

(6) 数学问题中含有参变量,这些变量的不同取值导致不同的结果.

如: 解不等式时,分三种情况.

(7) 较复杂或非常规的数学问题,需要采取分类讨论策略来解决问题.

在问题解决中,学生清楚引起分类讨论的因素,就会采取针对性的方法解决. 教师在教学讲解这类问题时,切勿忽略对引起分类因素的分析,使学生进一步加深对分类讨论的思维方法了解.

结合引起分类讨论的因素,我们分析初高中的数学知识,发现中学的分类讨论主要应用在以下几个模块:

(1) 初中分类讨论的应用[1]. 研究表明,初中数学中,分类讨论的问题常见于应用模块、方程模块和平面几何模块,如: 三角形,圆中的分类讨论等.

(2) 高中分类讨论的应用[2]. 研究表明,高中数学中,分类讨论的问题常见于函数模块、数列模块和概率模块.

1.2 分类讨论解题步骤

依据分类讨论的标准——不重复、无遗漏的分划,下面我们来探讨分类讨论的具体解题步骤[3]. 通过分类可以使大量复杂的问题条理化、简单化,从而使人们分门别类的深入研究问题. 分类讨论解决问题时,往往需要把综合的知识独立化,将复杂的问题分成相互独立的子问题. 我们遵循解题的原则,应用相应的概念知识解决子问题. 最后,将解决的子问题归纳起来完成分类讨论的. 分类讨论过程中,体现了化整为零,分别对待,各个击破的思想方法.

分类讨论的解题步骤,归纳起来主要有 5 步:

(1) 明确分类的对象. 我们要确定讨论的目标,弄清楚对哪个参数进行讨论.

(2) 合理的分类讨论. 这就要求,我们要明白讨论的因素,然后根据讨论的切入点,对讨论对象进行分类. 同时,分类的时候要做到不重不漏,标准统一.

(3) 逐步解决. 在分类后,就需要解决每类的问题. 依据分类的标准,应用相关的知识概念,解答每步的问题,得到阶段性的结果.

(4) 筛选结果. 这要求,我们根据题目的要求,对上述的结果进行检验,选出满足要求的结果.

(5) 归纳作答. 将各类的情况进行归纳和总结.

分类讨论是中学数学中重要的数学思想之一. 遇到分类讨论问题时,需要我们认真分析,逐步区分分类的实质,从现象和本质着手进行分类讨论. 如果学生灵活应用分类讨论方法,在解决数学问题中必会获益匪浅.

2 个案研究

中学的数学中的分类讨论问题一直都是学生难以掌握的问题. 从历年的中高考发现,学生解决此类问题错误五花八门: 有不会分类讨论的、有讨论不周全的、有讨论重复等,导致这类题的得分率偏低. 在这里,我们从一个学生实际辅导过程,来做一个分类讨论教学的个案分析[5].

2.1 研究对象的描述

本文研究的对象是一名高二文科班的学生,为了方便表述称作 Z 同学. Z 同学,男,上课认真听讲,学习态度良好,有自觉性,学习综合成绩通常在全年段 10%. 从近期的作业情况,发现 Z 同学在解答有参数的导数问题频繁出错.

2.2 案例研究

在个案研究中,我们先了解该学生在分类讨论中出现的问题. 我们针对问题,采取相应的辅导和矫正措施,使 Z 同学最终掌握了该类问题中的分类讨论思想. 下面我们分三个阶段,来阐述个案研究过程.

第一阶段: 一般了解

在导函数及其内容的学习后,为了提高学习水平,教师有意识地带入有参数的习题. 在一次测验,有一题,如下:

已知函数 $f(x) = x - ae^x, a \in R$,讨论该函数的单调性.

解答时,Z 同学正确地求出导函数 $f'(x) = 1 - ae^x$,就令 $f'(x) = 0$ 试图求出 x 的值. 之后,Z 同学对参数按照 $a \neq 0$ 和 $a = 0$ 两种情况讨论. 最后,Z 同学不能正确地解答问题,其解题过程中还有计算错误.

从 Z 同学的解答过程,我们可以看出该同学具有分类的意识,但并不明白如何正确分类. 从其解答正确的部分,我们看到 Z 同学掌握了利用导函数知识. 我们查阅 Z 同学的作业,发现 Z 同学在导数的分类讨论问题中频繁出错. 而且对比所有分类的解答过程,发现 Z 同学均按照 $a \neq 0$ 和 $a = 0$ 两种情况

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

进行分类讨论. 面对这种现象,我们猜测: Z 同学是单纯的模仿以前的解题思路还是不会分类讨论. 带着疑问,我们进行研究.

第二阶段: 深入了解

这是学生们第一次接触含参数的导数问题. 在些之前,学生所遇到的分类讨论问题是一元二次方程的分类讨论. 我们猜想该学生有可能是模仿一元二次方程的分类讨论进行解题. 为此,我们对 Z 同学进行一次诊断性测验,题目如下:

解方程: $3x^2+2ax+1=0$.

Z 同学快速做出答案: $x=\dfrac{-2a\pm\sqrt{4a^2-12}}{6}$.

从答案看,Z 同学直接利用一元二次方程的求根公式. 为了进一步了解学生的思维过程,我们进行访谈调查:

问: 这样做的,对吗?

答: 哦(思考几秒),没讨论有没有根.

问: 怎么讨论呢?

答: 看判别式大于或小于零

从 Z 同学访谈过过程,我们可以得出: Z 同学是在快速做出答案的情况下,忽略了根存在的条件. 同时,反映该同学明白二次函数讨论的依据,掌握二次函数分类讨论的思维方法. 这足以推翻我们前面认为该同学只是模仿以前解题的猜测. 但是,Z 同学在导数的分类讨论频繁出错,原因在哪里. 带着问题我们进行进一步的探究.

第三阶段: 辅导矫正

看到这个情况,我们就对应的拿出上面的一道题目,加强 Z 同学对分类讨论的理解. 其过程如下:

问: 你看看这道题 "求函数 $f(x)=x^3+ax^2+x+b$ 的单调性". 你怎么做?

答: 求导,分类讨论,考虑 a.

问: 怎么考虑 a?

答: 分 $a\neq0$ 和 $a=0$.

问: 为什么要分 $a\neq0$ 和 $a=0$?

答: 看根情况.

问: 你比较一下刚刚做的题目(第二阶段的题目),发现什么?

答: 噢,明白了. 应该考虑 Δ 判别式的问题.

从 Z 同学的最后回答,我们可以看出该学生已经理解了这类题引起分类的因素—有没有根,而不是单纯的对参数与 0 进行比较大小.

第四阶段: 检测反馈

通过前三个阶段,我们发现 Z 同学在解决带有参数的导数问题时,不明白引起分类的因素是什么,导致这类问题频繁出错. 对 Z 同学进行辅导和矫正后,我们来检测其是否真的掌握了这类分类讨论题型.

我们根据引起二次函数分类的四种因素,即是不是二次函数、有没有根、根的大小比较和根与区间的关系,设计出相应的带参数导数的检测题目. 依然以作业的形式,给 Z 同学独立做答. 在我们没有加任何干预的情形下,而该同学全部正确地完成. 说明该同学已经完全掌握了导数中的分类讨论.

2.3　反　思

从对 Z 同学的个案研究中,我们知道该同学具有分类的思想和掌握二次函数的相关知识,但遇到带有参数的导数问题就不清楚如何正确分类. 在面对考察导数、二次函数和函数性质等复杂题时,Z 同学关注点放在导数上而忽略分类讨论的实质在于二次函数的知识问题,导致这类题目出错. 我们对其进行辅导和矫正时候,将二次函数的知识分离出来. 待 Z 同学掌握了其中的分类讨论思想后,再把导数和二次函数的知识组合回归到出错的题目,逐步疏导,使该同学掌握分类讨论的标准.

从个案分析中,我们提出几点教学反思:

教师在讲解数学思想和方法时候,要强调它们的来源和起因,不是一味地向学生灌溉知识. 否则,会导致越来越多的学生淹没在知识中,逐渐讨厌数学学科. 当学生在面临复杂的问题时,往往不能找出主要的关注点,从而阻碍问题的解决. 教师在教学的过程中,应该注重培养对知识分离和组合的方法,带领学生一步一步剖析知识点进而解决问题.

教育家布鲁姆,提出人人都是好学生,只要给他们足够的学习时间和辅助恰当的教学手段. 学生不能取得好成绩和知识的漏洞息息相关. 在辅导学生方面,教师应该与学生平等地进行沟通,找出学生的本质问题. 在了解学生的知识问题后,教师要选择适合学生的方法,对其进行辅导、矫正和及时反馈,从而提高学生的学习兴趣和能力.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] 吴海华. 分类讨论思想在初中数学解题中的应用[J]. 江南大学学报: 教育科学版,2008(3):95 - 97.
[2] 朴希兰,朴勇杰. 分类讨论思想在高中数学解题中的应用[J]. 教育教学论坛,2015(7):169 - 170.
[3] 王敏. 分类讨论思想在初中数学中的应用[J]. 读与写: 教育教学版,2016(12):73.
[4] 曹贤鸣,阮孟国. 分类讨论及其应用[J]. 中学数学教学参考,2002(8):54 - 56.
[5] 倪桓华. 一个数学后进生的个案研究[J]. 数学教育学报,2002,11(4):27 - 30.
[6] 王仲春等. 数学思维与方法论[M]. 北京: 高等教育出版社,1989.
[7] 朱成杰. 数学思想方法学教学研究导论[M]. 上海: 文汇出版社,1998.

A Case Study on the Classification of Middle School Mathematics

Li Yun Zhao Xuezhi

(1. Fuzhou Drum Tower Second Central Primary School, Fuzhou Fujian 350001;
2. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

As an important content of mathematics education, mathematical thinking method has aroused people's attention. Both the past syllabus and the new curriculum standard put the classification and integration as an important mathematical thinking method. This paper summarizes the basic steps in the classification of middle school mathematics and the basic steps of problem solving. In the teaching practice of middle school, we selected a student who discussed the problem as a case study. By diagnosing and correcting the knowledge, this student mastered the corresponding classification theory.

Key words: classification discussion, mathematical thought method, case study.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net