首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷 第 3 期 Journal of Capital Normal University No. 3
2020 年 6 月 (Natural Science Edition) Jun. ,2020

Koch 曲线的 Hausdorff 测度的改进下界估计*

郭 东 亮

(中山大学电子与通信工程学院,广东 广州 510006)

摘要:为了研究 Koch 曲线的 Hausdorff 测度的下界,本文在 Koch 曲线上定义了质量分布函数 μ,对任意覆盖 U 导出了关系式 $\mu(U) \leqslant 1.876 \mid U \mid^s$,利用质量分布原理,得到了 Koch 曲线的 Hausdorff 测度下界的更好估计值 $H^s(K) \geqslant 0.533\ 049\ 041$.

关键词:Koch 曲线;Hausdorff 测度;质量分布原理;下界估计

中图分类号:O174.12 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2020.03.003

0 引 言

在分形几何研究中,确定分形的 Hausdorff 维数与 Hausdorff 测度非常重要,但这又是一个难题,相对而言,计算 Hausdorff 测度更困难[1]. 对于一般集合,计算其 Hausdorff 测度难度很大,尚无普遍适用的计算方法. 满足开集条件的自相似分形集由于具有严格的自相似性,目前已知的研究成果最多. Cantor 集、Koch 曲线和Sierpinski 垫片是 3 个经典自相似集,目前三分 Cantor 集的 Hausdorff 维数与 Hausdorff 测度已经解决[1],但对于 Koch 曲线和 Sierpinski 垫片,人们只算得其 Hausdorff 维数,对于其 Hausdorff 测度则难以计算出准确值,只能估计其上下界[2].

文献[3 - 5]研究了 Koch 曲线 K 的 Hausdorff 测度并对其上界进行了估计,文献[6 - 8]利用质量分布原理得出了 K 的 Hausdorff 测度的下界估计值 $H^s(K) \geqslant 0.526\ 316$;文献[9 - 10]用数值计算方法对 K 的 Hausdorff 测度进行了计算机模拟并得到了数值解. 本文在已有研究成果基础上,通过定义质量分布函数 μ,对任意覆盖 U 导出了关系式 $\mu(U) \leqslant 1.876 \mid U \mid^s$,基于该式并利用质量分布原理得出了 Koch 曲线 Hausdorff 测度的更好下界估计.

收稿日期:2019-09-05

*广东省自然科学基金项目(2018B0303110016)

1 Koch 曲线及其 Hausdorff 测度

1.1 Koch 曲线

设 K_0 是 Euclid 平面 R^2 上的线段[0,1],将 K_0 3 等分,以中间的 1/3 线段为底边向上作正三角形,再去除底边,得到一条由 4 个长度为 1/3 的边组成的折线,记为 K_1,对 K_1 的每个边重复上述过程,得到 4^2 个长度为 $1/3^2$ 的边组成的折线,记为 K_2,无限重复以上过程,得到折线序列 $K_0, K_1, K_2, \cdots, K_n, \cdots$,当 $n \to \infty$时,此折线序列趋于一条曲线 K,即 Koch 曲线.

下面是关于 Koch 曲线 K 的一些相关定义和结果[1-2].

(1)K 是由压缩比为 1/3 的相似压缩定义的,其 Hausdorff 维数是 $s = \log_3 4$.

(2)K 是路径连通的,设点 A、$A' \in K$,记 AA' 为 K 上的从点 A 到点 A' 的连通弧.

(3)由 Koch 曲线的迭代过程可知,$K_n(n \geqslant 1)$ 是由 4^n 个长度为 $1/3^n$ 的边组成的折线,对 K_n 的每条边进行上述迭代,可得到与 K 几何相似的集合,称此集合为 $\left(\frac{1}{3^n}\right)$ - Koch 曲线,记为 $\left(\frac{1}{3^n}\right)$- K.

1.2 相关定义和引理

定义 1 设分布函数 μ 为 K_0 上的一个测度,且满足 $\mu(K_0) = 1, \mu\left(\left(\frac{1}{3^n}\right) - K\right) = \frac{1}{4^n}, \mu(K_0 - K) = 0$, $n = 1,2,3,\cdots$,则分布函数 μ 为 K 上的一个质量分布.

定义 2 第 n 级 Koch 曲线 K_n 含有 4^n 个底边长

为 $1/3^n$ 的等腰三角形,每个这样的等腰三角形称为一个基本三角形,记为 $\triangle_n$,K_n 中与覆盖 U 相交的 $\triangle_n$ 的个数记为 $\alpha(U)$.

引理 1(质量分布原理)[1] 设任意非空紧集 $F \subset R^n$,μ 是 F 上定义的质量分布,且对某个 s 存在 $c > 0$ 和 $\delta > 0$,使

$$\mu(U) \leqslant c\,|U|^s$$

对所有满足 $|U| \leqslant \delta$ 的集 U 成立,则 F 的 Hausdorff 测度

$$H^s(F) \geqslant \frac{\mu(F)}{c}$$

2 主要结果及证明

定理 1 记 K 为 Koch 曲线,U 为 K 的任意覆盖,则有

$$\mu(U) \leqslant 1.876\,|U|^s, \tag{1}$$

其中

$$|U| = \max\{|x-y| : x, y \in U\}.$$

证明 分别分析 $\alpha(U)$ 的可能情况. 对于 $\alpha(U) = 2$ 的情况,所有覆盖类型可以归结为 4 种,如图 1 所示. 注:为表达简便,本文只画出各等腰三角形的底边,以下同).

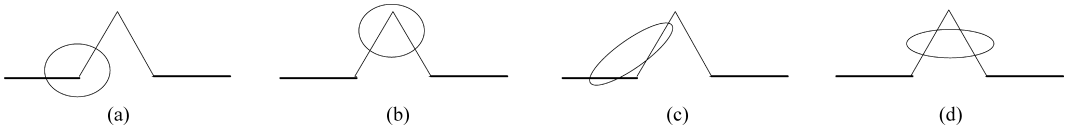


图 1 第 1 种情况($\alpha(U) = 2$)

图 1 中,(a)和(c)都是 U 覆盖 K_1 的第 1 个和第 2 个三角形的情况,其中(a)代表 U 的边界与 K_1 相交只有 2 个交点的情况,(c)代表 U 的边界与覆盖 K_1 相交有≥3 个交点的情况;(b)和(d)都是 U 覆盖 K_1 的第 2 个和第 3 个三角形的情况,其中(b)代表 U 与覆盖 K_1 的交点数为 2 的情况,(d)代表 U 与覆盖 K_1 的交点数≥3 的情况.

$\alpha(U) = 3$、4 的情况分别示于图 2、3,且根据交点数量情况分别示于(a)和(b)图.

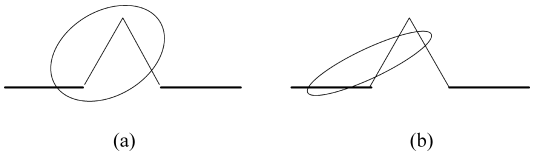


图 2 第 2 种情况($\alpha(U) = 3$)

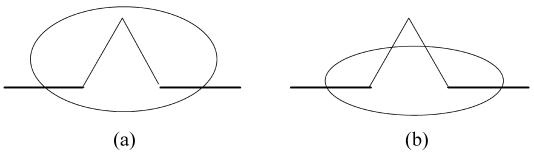


图 3 第 3 种情况($\alpha(U) = 4$)

最后分析 $\alpha(U) = 1$ 的情况,图 4 示出其覆盖类型的几种情况,对于图 4(a)的情况,由于分形迭代过程的无限性和分形的自相似性,图 4(a)的下一步迭代将出现图 1(a)的情况,即 $\alpha(U) = 2$ 的情况. 同理,图 4(b)的下一步迭代将出现图 2(a)的情况,即 $\alpha(U) = 3$ 的情况;图 4(c)的下一步迭代将出现图 3(a)的情况,即 $\alpha(U) = 4$ 的情况. 此外,根据覆盖 U 的位置和形状,也可能出现图 1(c)、图 2(b)、图 3(b)的情况,不再赘述.

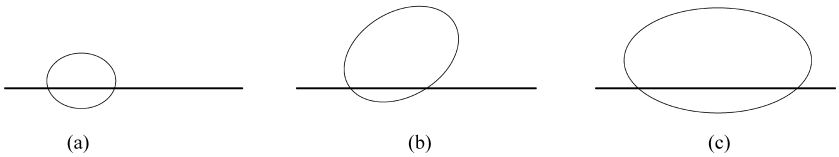


图 4 $\alpha(U) = 1$ 的情况

综上,由于分形迭代的无限性和分形的自相似性,仅需考虑 $\alpha(U) = 2,3,4$ 3 种情况(由平面几何关系,$\alpha(U) \geqslant 5$ 的情况并不存在).

选取 K_n,$n = 3$ 的情况讨论,如图 5. 对于第 1 种情况的(a),称 U 的边界与 K_n 相交的 2 个交点中,左边的交点为左交点,记为 L,右边的交点为右交点,记为 R.

当 L 在线段 D_3E 上时,根据 R 的位置分别分析如下:

(1)当 R 在线段 EE_2、E_2E_1、E_1E_3 和 E_3F 内时.

这种情况是 L 落在 $\triangle DD_1E$ 内(指该三角形所包含的线段 DD_2、D_2D_1、D_1D_3 和 D_3E 内)且 R 落在

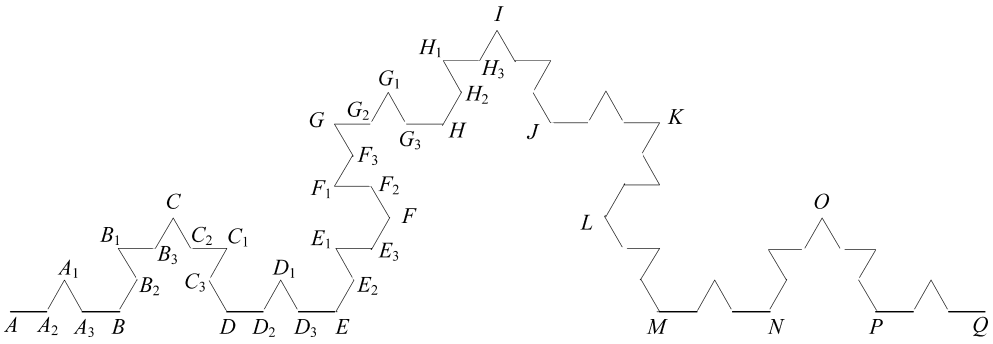


图 5　Koch 曲线 (K_3)

$\triangle EE_1F$ 内(指该三角形所包含的线段 EE_2、E_2E_1、E_1E_3 和 E_3F 内),根据分形的自相似性,这种情况不需单独考虑.

(2)当 R 在线段 FF_2 和 F_2F_1 内时.

对任意覆盖 U 和 K_n (n 可为任意大),都有

$$\max\{\mu(U)\} = \frac{7}{64} = 0.109\ 375,$$

而覆盖 U 的直径 $|U| \geqslant |EF| = 1/9$,

因此,有 $1.876|U|^s \geqslant 1.876 \times \left(\frac{1}{9}\right)^s =$

$0.117\ 249\ 87 > \max\{\mu(U)\}$.

(3)当 R 在线段 F_1F_3 和 F_3G 内时.

对任意覆盖 U 和 K_n (n 可为任意大),都有

$$\max\{\mu(U)\} = 9/64 = 0.140\ 625.$$

而覆盖 U 的直径 $|U| \geqslant |EF_2| =$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\sin 30°\right)^2+\left(\frac{1}{27}\cos 30°\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{27},$$

因此,有 $1.876|U|^s \geqslant 1.876 \times \left(\frac{\sqrt{13}}{27}\right)^s =$

$0.147\ 867\ 40 > \max\{\mu(U)\}$.

(4)当 R 在线段 GG_2、G_2G_1、G_1G_3、G_3H、HH_2、H_2H_1 内时.

对任意覆盖 U 和 K_n (n 可为任意大),都有

$$\max\{\mu(U)\} = \frac{15}{64} = 0.234\ 375.$$

而覆盖 U 的直径 $|U| \geqslant |EG| =$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{18}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{9},$$

因此,有 $1.876|U|^s \geqslant 1.876 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^s =$

$0.234\ 499\ 81 > \max\{\mu(U)\}$.

(5)当 R 在线段 H_1H_3、H_3I 内时.

对任意覆盖 U 和 K_n (n 可为任意大),都有

$$\max\{\mu(U)\} = \frac{17}{64} = 0.265\ 625,$$

而覆盖 U 的直径 $|U| \geqslant |EH_1| =$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\times\sin 30°\right)^2+\left(\frac{1}{27}\cos 30°\right)^2} = \frac{\sqrt{57}}{27},$$

因此,有 $1.876|U|^s \geqslant 1.876 \times \left(\frac{\sqrt{57}}{27}\right)^s = 0.375$

$739\ 00 > \max\{\mu(U)\}$.

综上,对于 K_n,不管 n 多大,只要覆盖 U 满足:L 在线段 D_3E 上,R 在多边形 $FF_1GG_1HH_1I$ 所对应的 Koch 曲线内,式(1)恒成立.

同理,可以得到对任意的 n,当 L 分别在线段 D_3D_1、D_1D_2、D_2D、DC_3、C_3C_1、C_1C_2、C_2C、CB_3、B_3B_1、B_1B_2、B_2B、BA_3、A_3A_1、A_1A_2、A_2A 上,R 在多边形 $FF_1GG_1HH_1I$ 所对应的 Koch 曲线内时,式(1)恒成立.

用同样的方法,可以得到对于第 2、3 种情况,式(1)也成立.

定理 1 证毕.

利用质量分布原理,可立刻得到 Koch 曲线 K 的 Hausdorff 测度的下界估计.

定理 2　记 Koch 曲线 K 的 Hausdorff 测度为 $H^s(K)$,则有

$$H^s(K) \geqslant \frac{1}{1.876} = 0.533\ 049\ 041.$$

这是 Koch 曲线 Hausdorff 测度目前已知的最好下界.

3　结　论

本文通过在 Koch 曲线 K 上定义质量分布函数 μ,导出对 K 的任意覆盖 U 的关系式 $\mu(U) \leqslant 1.876|U|^s$,利用质量分布原理计算出了 K 的 Hausdorff 测度的新下界估计值 $H^s(K) \geqslant 0.533\ 049\ 041$,这是关于 Koch 曲线 Hausdorff 测度下界的更好估计,也是目前已知的最好下界.

参 考 文 献

[1] FALCONER K. 分形几何——数学基础及其应用[M]. 曾文曲,译. 沈阳:东北大学出版社,1991.

[2] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度——Koch 曲线[J]. 中国科学(A 辑),1998,28(2):103 - 107.

[3] 宋寿柏,谢明勤. Koch 曲线的 Hausdorff 测度[J]. 安徽师范大学学报(自然科学版),1999,22(3):198 - 199.

[4] 陈尔明,堵秀凤. Koch 曲线的 Hausdorff 测度的估计[J]. 数学研究,1999,32(3):324 - 326.

[5] 文胜友,许绍元. 关于自相似集的 Hausdorff 测度[J]. 数学学报,2001,44(1):117 - 124.

[6] 崔振文,王彩芬,杨永琴. Koch 曲线的 Hausdorff 测度的下界估计[J]. 河南师范大学学报(自然科学版),2002,30(3):5 - 7.

[7] 王彩芬. Koch 曲线的 Hausdorff 测度的下界估计[J]. 青岛大学学报(自然科学版),2004,17(2):29 - 30.

[8] ZHU Z W, ZHOU Z L, JIA B G. On the lower bound of the Hausdorff measure of the Koch curve[J]. Acta Mathematica Sinica-English Series, 2003, 19(4): 715 - 728.

[9] 许绍元,曾山. 关于 Koch 曲线的 Hausdorff 测度的近似值的计算[J]. 工程数学学报,2001,18(1):83 - 88.

[10] 曾山,许绍元. 关于 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的上估的算法[J]. 韩山师范学院学报,2000(2):27 - 32.

[11] 张元康,马际华. 具有两个相似压缩比的似 Koch 曲线 Hausdorff 测度的上界估计[J]. 山西师范大学学报(自然科学版),2015,29(1):23 - 26.

[12] 瞿成勤,苏维宜,王衍波. Koch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度的估计[J]. 南京大学学报(自然科学版),2000,36(4):397 - 402.

[13] 杜兴华. 几种变形 Koch 曲线的 Hausdorff 测度的估计[J]. 大庆石油学院学报,2000,24(4):77 - 80.

[14] 张霞,周观珍. 两类推广 Koch 曲线的 Hausdorff 测度[J]. 宁波大学学报(理工版),2003,16(1):67 - 69.

[15] 朱智伟,周作领. 上凸密度与 Hausdorff 测度—Koch 曲线[J]. 中山大学学报(自然科学版),2001,40(6):1 - 2 + 6.

[16] 时红廷. 欧基里德网格空间中的离散指标[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),1994,15(3):9 - 19.

[17] 张增喜. 自相似集的边集及其 Hausdorff 维数[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2002,23(1):5 - 9.

[18] 张增喜. 用含有整数参数的序列——二元序列估计 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),1999,20(1):1 - 6.

[19] 郑维行,王声望. 实变函数与泛函分析概要(第 1 册)[M]. 5 版. 北京:高等教育出版社,2019.

[20] 王兴元,孟娟. 分形几何学及应用(上册)[M]. 北京:科学出版社,2016.

An Improved Lower Bound Estimation for Hausdorff Measure of Koch Curve

GUO Dongliang

(School of Electronics and Communication Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou Guangdong 510006)

Abstract: The lower bound of Hausdorff measure of Koch curve is studied. The mass distribution function μ is defined on Koch curve. The relation $\mu(U) \leqslant 1.876 \mid U \mid^s$ for arbitrary coverage U is derived. By using the principle of mass distribution, a better estimate of the lower bound of Hausdorff measure of Koch curve $H^s(K) \geqslant 0.533\ 049\ 041$ is obtained.

Keywords: Koch curve; Hausdorff measure; mass distribution principle; lower bound estimation