DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.06.001

投资组合对非系统性风险的发散作用*
——基于单调非增次模集函数的证明

陈奕延[1,3] 李 晔[1,2,3]

(1. 北京理工大学自动化学院,北京 100081; 2. 华北理工大学河北省数据科学与应用重点实验室,河北 唐山 063210; 3. 英国系统科学学会,英国 伦敦 CR82AD)

摘 要

风险是客观存在且无法灭失的,有效降低投资中的风险程度是当前研究投资问题的热点之一. 通过扩展单调非增次模集函数的性质,利用该性质可证明含多个资产的投资组合对投资中的非系统性风险有发散作用,并用标准差成功对其进行检验. 得到结论: 含有多个资产的投资组合的非系统性风险比投资多个资产的非系统性风险的组合更低.

关键词: 投资组合,风险偏好,非系统性风险,单调非增次模集函数,标准差.
中图分类号: O174.13

1 投资组合及研究背景

投资组合是由投资主体持有的股票、债券、衍生金融产品等资产组成的集合. 投资组合理论是1952年由马柯维茨(Harry Markowitz)提出的,该理论通常被认为是现代金融学的发端. 投资组合的基本思想是将不同资产配置在一起,通过风散化的投资方式对冲掉一部分资产的非系统性风险. 投资组合一直是国内经济领域研究的热点问题之一,许多学者通过对投资理论进行改进,从而衍生出许多改进型模型[1-5]. 李佳等[1]在含有交易费用的双目标函数模型中引入了背景风险,从是否含有背景风险和背景风险偏好度大小两方面对投资组合问题展开研究; 费为银等[2]假设带有递归偏好的投资者在考虑通胀的背景下,通过考虑模型误定和通胀的随机波动对消费和投资组合带来的影响,建立投资者决策的值函数所满足的HJB方程,根据特定的效用函数推导最优消费和投资决策的显示解; 徐维军等[3]基于方差或VaR方法度量投资组合风险的不足,在Roll的均值-跟踪误差模型基础上引入CVaR总风险约束,同时考虑到现实交易市场中存在交易费用约束和多元权值约束条件等因素,构建基于CVaR和多元权值约束下的积极投资组合模型; 詹泽雄等[4]考虑了有限理性人决策行为特征及风险的心理感知对投资组合选择的影响,建立基于前景价值与下偏二阶矩的投资组合模型; 胡支军等[5]在展望理论框架下,构建了考虑风险投资家损失厌恶心理特征的风险项目投资组合优化模型,给出了处理项目组合选择中价值估计不确定性的贝叶斯方法,并应用Monte Carlo模拟将模型转化为线性整数规划问题. 诸如此类的研究还有许多,大多以研究模型为目的,从约束条件或模型结构上入手来分析解决投资中,却鲜有对该理论本身进行研究,特别是研究理论基本思想的证明.

本文的研究对象是投资组合理论本身,研究目的是用数学工具证明投资组合理论发散系统性风险这一基本思想的正确性,通过投资组合的单调非增次模集函数证明了该理论的正确性,并通过标准差构造的方程二次验证理论的正确性. 详见图1.

2 风险偏好及假设

风险偏好指投资主体承担风险的态度. 风险偏好是制定风险决策的前提条件. 根据投资主体承担风险的态度,可将投资主体的风险偏好分为三类: 风险厌恶、风险追求以及风险中立. 风险厌恶,指投资主体在预期收益相同时倾向于选择低风险的资产,同时在风险相同时倾向于选择预期收益较高的资

收稿日期: 2017-10-15
* 河北省数据科学与应用重点实验室开放课题(20170320002); 英国系统科学学会深度课题(UA1709001F).

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

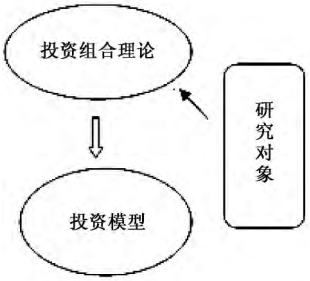


图1 研究示意图

产;风险追求,指投资主体通常主动寻求承担风险,喜好风险收益产生的波动性胜于风险资产的稳定性,当预期收益相同时,持风险追求态度的投资主体通常选择风险较高的资产,因为这会给它们带来更大的效用;风险中立,指投资主体既不回避风险,也不追求风险,而是按照预期收益的大小选择资产.

本文假设投资主体对风险的偏好是风险厌恶,即投资主体厌恶风险的产生,从而想方设法回避风险. 因为投资组合理论的基本思想就是分散非系统性风险,故只有投资主体持风险厌恶态度时对这一理论的研究才更具实际意义. 若不满足风险厌恶条件则无须回避风险,因为此时对投资主体而言风险大小对其并不产生决策上的影响,此时分析风险没有意义.

3 非系统性风险

投资组合中的风险分为系统性风险与非系统性风险. 这里利用标准差对一个投资组合进行风险测度,即以某种方式估计其实际回报率与期望回报率之间可能的偏离程度. 假设某投资组合有 N 种风险资产,假设 σ_P 为投资组合的标准差,w_i 与 w_j 表示投资组合中投资于资产 i 与资产 j 的比例,σ_{ij} 表示资产 i 与资产 j 的协方差,当 $i = j$ 时,有 $\sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma_i^2 = \sigma_j^2$,即为资产 i 与资产 j 的方差,$\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$,$\rho_{ij}$ 为资产 i 与资产 j 的相关系数,则投资组合的标准差为:

$$\sigma_P = \left[\sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}\right]^{1/2}. \quad (1)$$

假设投资 N 种风险资产的比例是一样的,即 $w_i = w_j = \frac{1}{N}$,则公式(1)可变型为:

$$\sigma_P = \left[\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 + \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{N}\sigma_{ij}\right]^{1/2}. \quad (2)$$

因为每一项资产的方差是有限量,$\exists C \geqslant 0$,使得 $\max\{\sigma_i^2\} \leqslant C$,当 $N \to +\infty$ 时,明显有以下结论:

$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 \leqslant \frac{\sigma^2}{N} \to 0$,但第二项不会趋于 0,因为 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{N}\sigma_{ij} = (N^2 - N)\ \overline{\sigma}_{ij}$,其中 $\overline{\sigma}_{ij}$ 为资产 i 与资产 j 协方差的算术平均值,将上式代入公式(2)后变型,显然可得:

$$\sigma_P^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{\sigma}_{ij}. \quad (3)$$

$N \to +\infty$ 时,$\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 \to 0$,$\left(1 - \frac{1}{N}\right)\overline{\sigma}_{ij} \to \overline{\sigma}_{ij}$,由此可知,当投资组合中的风险资产的数量增加时,各项资产之间的协方差值有正有负,它们之间会相互对冲抵消,但不会被完全抵消,因为各项资产的收益变动存在一定的同向性,这种同向性是普遍的,被称为市场风险,又称为系统风险;可以通过增加投资组合中资产数量从而对冲抵消的风险则被称为企业风险,又称非系统风险. 通过扩大投资组合中的资产规模,可以消除非系统性风险,但不能消除系统性风险[6]. 下面章节用单调非增次模集函数的性质证明非系统性风险可以通过增加投资组合中的资产数量来进行抵消.

4 单调非增次模集函数及证明

集函数多用于博弈论、优化算法、复杂网络等学科领域[7-11],由定义可知[12],给定有限集 $E = \{1,2,\cdots,n\}$,设 f 为相应的集函数 $f: 2^E \to \mathbf{R}$,若对于 $\forall S, T \subseteq E$,存在 $f(S) + f(T) \geqslant f(S \cup T) + f(S \cap T)$,则称 f 是次模集函数(submodular set function). 若对于 $\forall S, T \subseteq E$,当 $T \subseteq S$ 时有 $f(S) \leqslant f(T)$,此时则称 f 为单调非增次模集函数. 下面用该函数及其性质证明投资组合对非系统性风险的发散作用.

设有限集合 $V = \{1,2,\cdots n\}$,V 是风险资产 k 组成的集合,$k = 1,2,\cdots n$,设 ρ 为风险资产的非系统性风险集函数,$\rho: 2^V \to \mathbf{R}$,若对 $\forall S, T \subseteq V$,$T \subseteq S$ 时有 $\rho(S) \leqslant \rho(T)$,并且有 $\rho(S) + \rho(T) \geqslant \rho(S \cup T) + \rho(S \cap T)$,则称 ρ 为投资组合中风险资产的非系统性风险的单调非增次模集函数,这里 V 及其任意子集均可视作一个由风险资产构成的投资组合. 根据定义可知,对任意风险资产 $i, j \in V$,不等式 $\rho(\{i\}) + \rho(\{j\}) \geqslant \rho(\{i\} \cup \{j\}) + \rho(\{i\} \cap \{j\})$ 成立,即:

$$\rho(\{1\}) + \cdots + \rho(\{n\}) \geqslant \frac{1}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2}\rho(\{i\} \cup \{j\})\right]. \quad (4)$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

这里 $\{i\} \cap \{j\} = \varnothing$, $\rho(\{i\} \cap \{j\}) = \rho(\varnothing) = 0$, 又因为 ρ 是单调非增的, $\{i\} \cup \{j\} = \{i,j\} \subseteq V$, 有 $\rho(\{i\} \cup \{j\}) \geqslant \rho(V)$, 代入公式(4)可求得:

$$\rho(\{1\}) + \cdots + \rho(\{n\}) \geqslant \frac{1}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2} \rho(V)\right]. \tag{5}$$

对公式(5)中不等式右端进行变形, 则有 $\frac{1}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2} \rho(V)\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2} \rho(V)\right] + \frac{1}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2} \rho(\varnothing)\right]$, 根据定义可得:

$$\frac{1}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2} \rho(V)\right] \geqslant \frac{2}{n-1}\left[\sum_{\forall i,j \in V}^{C_n^2} \rho(V)\right] = n\rho(V), \tag{6}$$

$n\rho(V) \geqslant \rho(V)$, 将其与公式(6)一并代入(5), 则可得以下结论:

$$\rho(\{1\}) + \cdots + \rho(\{n\}) \geqslant \rho(V) = \rho(\{1,\cdots,n\}). \tag{7}$$

到此证毕. 当 $n \to +\infty$ 时, $n\rho(V) \gg \rho(V)$, 则相应地 $\rho(\{1\}) + \cdots + \rho(\{n\}) \gg \rho(\{1,\cdots,n\})$, 可知当投资组合 V 中的风险资产个数 n 越大, 投资组合对非系统性风的发散作用越明显, 投资组合的整体非系统性风险小于投资组合中风险资产的非系统性风险的组合, 即投资组合对非系统性风险有发散作用.

5　检验证明

使用标准差来再次证明上述章节的结论, 若证明成立, 则结论得到进一步强化. 根据定义, 设投资组合 V 的非系统性风险的标准差为 σ_A, 根据定义可知:

$$\sigma_A = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2\right]^{1/2}. \tag{8}$$

σ_i 为风险资产 i 的标准差, w_i 为投资组合中投资于风险资产 i 的比例, 设风险资产 i 的非系统性风险的组合标准差为 σ_B, 显然有:

$$\sigma_B = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i. \tag{9}$$

因为 $0 \leqslant w_i \leqslant 1$, $0 \leqslant w_i^2 \leqslant 1$, 所以有:

$$\sigma_A = \left[\sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right]^{1/2} \leqslant \sigma_B. \tag{10}$$

证毕. 由此可再次证明结论正确.

6　结　语

投资组合理论在实际中应用甚广, 该方法可有效对冲抵消非系统性风险, 从而使总体风险得到有效控制, 本文通过单调非增次模集函数对该性质进行了巧妙地证明, 并通过标准差再次证明结论正确, 从而强化了这一理论, 为今后研究投资组合在实践中的运用提供了理论依据.

参　考　文　献

[1] 李佳, 徐维军, 张卫国. 含有背景风险的双目标投资组合模型研究[J]. 运筹与管理, 2017, 4: 118 – 123.

[2] 费为银, 费晨, 夏登峰, 等. 模型不确定下带通胀的最优消费和投资组合问题研究[J]. 管理工程学报, 2017, 2: 177 – 184.

[3] 徐维军, 周平平, 李婷, 等. 基于 CVaR 和多元权值约束下的积极投资组合模型[J]. 系统管理学报, 2017, 26(2): 219 – 224.

[4] 詹泽雄, 吴宗法, 程国雄. 基于前景价值与下偏二阶矩的投资组合优化研究[J]. 北京理工大学学报: 社会科学版, 2017, 19(2): 55 – 66.

[5] 胡支军, 彭飞, 李志霞. 风险项目投资组合决策的贝叶斯评价与选择策略[J]. 中国管理科学, 2017, 2: 30 – 39.

[6] 李腊生, 翟淑萍, 崔秩秋. 现代金融投资统计分析[M]. 北京: 中国统计出版社. 2004: 135 – 139.

[7] 张晨宇. 基于数据挖掘技术的 A 股市场选股系统设计与实现[J]. 信息技术与信息化, 2017, 5: 23 – 27.

[8] 张焰升. 不确定投资组合问题的最小互熵模型[D]. 北京: 清华大学, 2015.

[9] 杜丽娜, 徐久成, 刘洋洋, 等. 基于三支决策风险最小化的风险投资评估应用研究[J]. 山东大学学报: 理学版, 2014(8): 66 – 72.

[10] 林健, 张强. 具有模糊联盟值的带偏好合作对策的 Shapley 值[J]. 系统管理学报, 2014(2): 217 – 223.

[11] 石煜. 基于数据挖掘的数量化模型选股分析平台[D]. 成都: 电子科技大学, 2012.

[12] Du D L. Submodular optimization: theory, algorihtms and applications[M]. Canada: Dual Quant Informatics, 2017: 12 – 14.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Divergent Effect of Portfolio on Unsystematic Risks: Based on the Proof of Monotone Non-Increasing Submodular Set Functions

Chen Yiyan[1,3] Li Ye[1,2,3]

(1. School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081;
2. Hebei Key Laboratory of Data Science and Application, North China University of Science and Technology, Tangshan Hebei 063210;
3. UK Systems Science Association, London UK, CR82AD)

Abstract

Risk is an objective existence and it can not be eliminated, reducing risk degree effectively in investment is one of the focuses on current research of investment. By expanding the properties of monotone non-increasing submodular set functions, using expanding properties, it can be proved that portfolio containing multiple assets could give a divergent effect on unsystematic risks, and it is tested through standard deviations. The conclusion shows that unsystematic risks of portfolio containing multiple assets are lower than that in cumulative single assets.

Key words: portfolio, risk preferences, unsystematic risks, monotone non-increasing submodular set functions, standard deviation.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net