DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.04.005

Banach 代数交叉积间的同构*

黄利忠
(山西大同大学量子信息科学研究所,山西 大同 037009)

摘 要

借助于 Banach 代数交叉积的万有性质,我们证明了等变同构的 Banach 代数动力系统相对应的 Banach 代数交叉积是同构的.

关键词: Banach 代数动力系统,交叉积,等变同构.
中图分类号: O177.5

C^* -代数动力系统是由 C^* -代数 A,局部紧群 G,以及 G 在 A 上的强连续作用 $\alpha: G \to Aut(A)$ 构成的一个三元序组. 而 C^* -代数交叉积 $A \times_\alpha G$ 是在 C^* -代数动力系统 (A,G,α) 的基础上,由 A,G,α 这三个元素构造出的新的 C^* -代数. 在过去的50多年中,交叉积被证明在构造和理解 C^* -代数方面起了巨大的作用. 由于在量子物理学及其它学科中的广泛应用,故对交叉积理论的研究显得尤为重要. Williams[1] 的专著《Crossed products of C^*-algebras》是第一本系统叙述 C^* -代数交叉积理论的著作. 基于理论和应用的重要性,大量学者投身于交叉积理论的研究,取得了丰富的成果[2-8]. 2011年,Wortel[9] 等人去除对代数的自伴性要求,提出了 Banach 代数交叉积的概念,并证明了 Banach 代数动力系统的非退化的连续共变表示与交叉积代数的非退化的有界表示是一一对应的. 在随后的文章中,Jeu M D[13] 进一步研究了 Banach 代数交叉积,并证明了交叉积代数与广义 Burling 代数是拓扑同构的;同时他将序关系引入交叉积中,并证明了在预序 Banach 空间上的预序交叉积的正的非退化的有界表示与预序 Banach 动力系统的正的非退化的 $\Re$ -连续的共变表示是一一对应的. 受 C^* -代数诱导交叉积的启发,文章[11]证明了当局部紧群是顺从时,Banach 代数交叉积和诱导交叉积是相等的.

收稿日期: 2017-09-28
* 国家自然科学基金资助项目(11301312);山西大同大学博士科研项目(2015-B-09).

在前期工作的基础上,笔者在文[12]中对与 Banach 代数动力系统相关的 Banach 代数交叉积的万有性质进行了深入的探讨,这对于在同构意义下交叉积代数的分类研究有重要的意义. 本文在 Banach 代数交叉积的万有性质的基础上,研究了等变同构的 Banach 代数动力系统相对应的 Banach 代数交叉积的同构关系.

1 准备工作

下面介绍 Banach 代数交叉积的定义及文中需要用到的相关结论.

设 A 是 Banach 代数,$Aut(A)$ 指 A 上有界自同构的全体,则 $Aut(A)$ (按乘法)是一个群. 设 α 是局部紧群 G 到 $Aut(A)$ 的映射. 称 α 是强连续的. 若对任何 $a \in A$,映射 $s \mapsto \alpha_s(a)$ 是连续的. 称三元组 (A,G,α) 是 Banach 代数动力系统,若 A 是 Banach 代数,G 是局部紧群,$\alpha: G \to Aut(A)$ 是群同态且是强连续的. 称偶对 (π,U) 是 (A,G,α) 在 Banach 空间 X 上的共变表示,如果 π 是 A 在 X 上的表示,U 是 G 在 X 上的表示,使得对任意的 $a \in A, s \in G$,有

$$\pi(\alpha_s(a)) = U_s \pi(a) U_s^{-1}$$

称共变表示 (π,U) 是连续的,如果 π 是范数有界的,U 是强连续的. 若 π 是 A 上的非退化表示,则称 (π,U) 是非退化的. 设 $C_c(G,A)$ 是定义在局部紧群 G 值域取值于 A 且具有紧支集的连续函数的全体,对任意 $f \in C_c(G,A)$,定义连续共变表示 (π,U) 在 Banach 空间 X 上的积分形式为:

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\pi \times U(f)(\cdot) = \int_G \pi(f(s))\, U_s \mathrm{d}\mu(s).$$

易见 $\pi \times U$ 是 $C_c(G,A)$ 在 X 上的一个表示.

定义 1.1[9] 设 (A,G,α) 是 Banach 代数动力系统,$\Re$ 是一族非空的一致有界的连续共变表示,定义 $C_c(G,A)$ 上的半范数 $\sigma^{\Re}$ 为:对任意的 $f \in C_c(G,A)$,

$$\sigma^{\Re}(f) := \sup_{(\pi,U)\in\Re} \| \pi \times U(f) \|.$$

我们称商空间 $C_c(G,A)/\ker(\sigma^{\Re})$ 在由 $\sigma^{\Re}$ 诱导的范数 $\| \cdot \|^{\Re}$ 下的完备化为相应的交叉积,记为 $(A \times_\alpha G)^{\Re}$. 本文中,从 $C_c(G,A)$ 到 $C_c(G,A)/\ker(\sigma^{\Re})$ 的商映射一律记为 $q^{\Re}$.

设 $\Re$ 是 Banach 代数动力系统 (A,G,α) 的一族非空的一致有界的连续共变表示. 称 (A,G,α) 在 Banach 空间 X 上的连续共变表示 (π,U) 是 $\Re$ - 连续的,若同态映射 $\pi \times U: C_c(G,A) \to B(X)$ 是 $\sigma^{\Re}$ - 有界的,即存在 $M > 0$,使得对任意的 $f \in C_c(G,A)$,$\| \pi \times U(f) \| \leqslant M\sigma^{\Re}(f)$. 显然,$\Re$ 中的任何共变表示都是 $\sigma^{\Re}$ - 连续的. 对此 $\Re$ - 连续的 (π,U),定义映射

$$(\pi \times U)^{\Re}(q^{\Re}(f)) = (\pi \times U)(f),\ f \in C_c(G,A),$$

则 $(\pi \times U)^{\Re}$ 是 $C_c(G,A)/\ker(\sigma^{\Re})$ 在 X 上的一个有界表示.

设 (A,G,α) 是 Banach 代数动力系统,$\mathrm{End}(C_c(G,A))$ 是从 $C_c(G,A)$ 到自身线性映射的全体. 定义从 A 到 $\mathrm{End}(C_c(G,A))$ 的映射 i_A 和从 G 到 $\mathrm{End}(C_c(G,A))$ 的映射 i_G 分别为:对任意的 $a \in A$,$r,s \in G$,$f \in C_c(G,A)$,

$$[i_A(a)f](s) := af(s),$$
$$[i_G(r)f](s) := \alpha_r(f(r^{-1}s)).$$

若 (π,U) 是 (A,G,α) 是连续共变表示,则对任意的 $a \in A$,$r \in G$,$f \in C_c(G,A)$,不难验证

$$\pi \times U(i_A(a)f) = \pi(a) \circ \pi \times U(f),$$
$$\pi \times U(i_G(r)f) = U_r \circ \pi \times U(f).$$

设 $\Re$ 是 (A,G,α) 的一族非空的一致有界的连续共变表示,则对任意的 $a \in A$,$r \in G$,$i_A(a)$ 和 $i_G(r)$ 是 $\sigma^{\Re}$ - 有界的,于是存在交叉积 $(A \times_\alpha G)^{\Re}$ 上的有界映射 $i_A^{\Re}(a)$ 和 $i_G^{\Re}(r)$,使得对任意的 $f \in C_c(G,A)$,均有

$$i_A^{\Re}(a)(q^{\Re}(f)) = q^{\Re}(i_A(a)f),$$
$$i_G^{\Re}(r)(q^{\Re}(f)) = q^{\Re}(i_G(r)f).$$

2 主要结果

本文主要在 Banach 代数交叉积万有性质的基础上,给出等变同构的两个 Banach 代数动力系统相对应的交叉积代数是同构的. 为此,我们首先给出 Banach 代数交叉积万有性质的具体内容(参见文[2]).

命题(*) 设 (A,G,α) 是 Banach 代数动力系统,其中 A 有有界的左逼近单位元,$\Re$ 是 (A,G,α) 在 Banach 空间 X 上的一族非空的一致有界的连续共变表示. 若 Banach 代数 B 满足下列条件:

(1) 存在 (A,G,α) 的取值于 $M_l(B)$ 的共变同态 (k_A,k_G);

(2) 给定 (A,G,α) 的非退化的 $\Re$ - 连续的共变表示 (π,U),存在 B 的非退化的有界表示 $L = L_{(\pi,U)}$ 使得 $\overline{L} \circ k_A = \pi$ 和 $\overline{L} \circ k_G = U$;

(3) $\lambda(B) = \overline{\mathrm{span}}\{k_A(a)\tilde{k_G}(f) : a \in A, f \in C_c(G)\}$,其中 $\lambda: B \to M_l(B)$ 是 B 的左正则表示;

则存在同构映射 $K: \lambda(B) \to (A \times_\alpha G)^{\Re}$,使得

$$\lambda(K \circ k_A) = i_A^{\Re} \quad 和 \quad \lambda(K \circ k_G) = i_G^{\Re}$$

都成立.

定义 2.1 设 (A,G,α) 和 (B,G,β) 是两个 Banach 代数动力系统,称同态映射 $\varphi: A \to B$ 是 G - 等变的(简称等变),若对任意的 $r \in G$,都有

$$\varphi \circ \alpha_r = \beta_r \circ \varphi.$$

若 φ 是连续的同构映射,则称 φ 是等变同构映射,这时我们也称动力系统 (A,G,α) 和 (B,G,β) 是等变同构的.

设 (A,G,α) 和 (B,G,β) 是两个等变同构的 Banach 代数动力系统,$\varphi: A \to B$ 是等变同构. 若 (π,U) 是 (A,G,α) 的连续共变表示,则对任意的 $b \in B$,$s \in G$,有

$$\pi \circ \varphi^{-1}(\beta_s(b)) = \pi \circ \alpha_s \circ \varphi^{-1}(b) = U_s(\pi \circ \varphi^{-1}(b))U_s^{-1}.$$

因此,$(\pi \circ \varphi^{-1},U)$ 是 (B,G,β) 的连续共变表示.

定理 2.2 设 (A,G,α) 和 (B,G,β) 是两个等变同构的 Banach 代数动力系统,$\varphi: A \to B$ 是等变同构. 设 $\Re_1$ 是 (A,G,α) 的一族非空的一致有界的连续共变表示,$\Re_2$ 是 (B,G,β) 的一族非空的一致有界的连续共变表示,且满足

$$\Re_2 = \{(\pi \circ \varphi^{-1},U) : (\pi,U) \in \Re_1\},$$

则交叉积 $(A \times_\alpha G)^{\Re_1}$ 和 $(B \times_\beta G)^{\Re_2}$ 同构.

证明 定义从 (B,G,β) 到 $M_l((A \times_\alpha G)^{\Re_1})$ 的偶对 (k_B,k_G) 如下:对任意的 $b \in (A \times_\alpha G)^{\Re_1}$,$r \in G$,

$$k_B(b) := i_A^{\Re_1}(\varphi^{-1}(b)),$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$k_G(r) := i_G^{\mathfrak{R}_1}(r),$$

则 (k_B,k_G) 是 (B,G,β) 的共变表示. 事实上,对任意的 $b \in (A \times_\alpha G)^{\mathfrak{R}_1}$, $r \in G$,

$$\begin{aligned} k_B(\beta_r(b)) &= i_A^{\mathfrak{R}_1}(\varphi^{-1}(\beta_r(b))) \\ &= i_A^{\mathfrak{R}_1}(\alpha_r(\varphi^{-1}(b))) \\ &= i_G^{\mathfrak{R}_1}(r)\, i_A^{\mathfrak{R}_1}(\varphi^{-1}(b)) \\ &= k_G(r)\, k_B(b)\, k_G(r^{-1}). \end{aligned}$$

定义映射 $\varphi \times \mathrm{id}: C_c(G,A) \to C_c(G,B)$ 为:

$$(\varphi \times \mathrm{id})(f)(s) := \varphi(f(s)).$$

则对任意的 $f \in C_c(G,A)$,我们有

$$\begin{aligned} &\sigma^{\mathfrak{R}_2}(\varphi \times \mathrm{id})(f) \\ &= \sup_{(\pi,U)\in\mathfrak{R}_1} \| \int_G (\pi \circ \varphi^{-1})(\varphi \times \mathrm{id})(f)(s)\, U_s \mathrm{d}\mu(s) \| \\ &= \sup_{(\pi,U)\in\mathfrak{R}_1} \| \int_G (\pi \circ \varphi^{-1})(\varphi(f(s)))\, U_s \mathrm{d}\mu(s) \| \\ &= \sup_{(\pi,U)\in\mathfrak{R}_1} \| \int_G \pi(f(s))\, U_s \mathrm{d}\mu(s) \| \\ &= \sigma^{\mathfrak{R}_1}(f). \end{aligned}$$

设 (π,U) 是 (B,G,β) 的 $\mathfrak{R}_2$ - 连续的连续共变表示,则存在 $M > 0$,使得对任意的 $g \in C_c(G,A)$,有

$$\| \pi \times U(g) \| \leqslant M\sigma^{\mathfrak{R}_2}(g),$$

从而对任意的 $f \in C_c(G,A)$,

$$\begin{aligned} \| \pi \times U(\varphi \times \mathrm{id}(f)) \| &\leqslant M \| \varphi \times \mathrm{id}(f) \|^{\mathfrak{R}_1} \\ &= M\sigma^{\mathfrak{R}_1}(f). \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\| ((\pi \circ \varphi) \times U) f \| \\ &= \| \int_G (\pi \circ \varphi) f(s)\, U_s \mathrm{d}\mu(s) \| \\ &= \| \int_G \pi(\varphi \times \mathrm{id}(f)(s))\, U_s \mathrm{d}\mu(s) \| \\ &= \| \pi \times U(\varphi \times \mathrm{id}(f)) \| \\ &\leqslant M\sigma^{\mathfrak{R}_1}(f). \end{aligned}$$

又因为对任意的 $a \in A, s \in G$,

$$\begin{aligned} (\pi \circ \varphi)(\alpha_s(a)) &= \pi(\beta_s(\varphi(a))) \\ &= U_s \pi(\varphi(a)) U_s^{-1}. \end{aligned}$$

所以 $(\pi \circ \varphi, U)$ 是 (A,G,α) 的非退化的 $\mathfrak{R}_1$ - 连续的连续共变表示,从而 $((\pi \circ \varphi) \times U)^{\mathfrak{R}_1}$ 是 $(A \times_\alpha G)^{\mathfrak{R}_1}$ 的非退化有界表示,且有

$$\begin{aligned} &\overline{((\pi \circ \varphi) \times)^{\mathfrak{R}_1}} \circ k_B(b) \\ &= \overline{((\pi \circ \varphi) \times)^{\mathfrak{R}_1}} \circ i_A^{\mathfrak{R}_1}(\varphi^{-1}(b)) \\ &= (\pi \circ \varphi)(\varphi^{-1}(b)) = \pi(b) \end{aligned}$$

和

$$\overline{((\pi \circ \varphi) \times)^{\mathfrak{R}_1}} \circ k_G(s) = \overline{((\pi \circ \varphi) \times)^{\mathfrak{R}_1}} \circ i_G^{\mathfrak{R}_1}(s) = U_s.$$

这样我们验证了 (k_B,k_G) 满足命题的第二个条件.

最后,我们证明等式

$$\lambda((A \times_\alpha G)^{\mathfrak{R}_1}) = \overline{\mathrm{span}}\{k_B(b)\ \tilde{k_G}(f) : b \in B, f \in C_c(G)\}.$$

由引理

$$\lambda((A \times_\alpha G)^{\mathfrak{R}_1}) = \overline{\mathrm{span}}\{i_A^{\mathfrak{R}_1}(\varphi^{-1}(b))\ i_G^{\mathfrak{R}_1}(f) : b \in B, f \in C_c(G)\},$$

同时,对任意的 $b \in B, f \in C_c(G)$,

$$\begin{aligned} k_B(b)\ \tilde{k_G}(f) &= k_B(b) \int_G f(s)\, k_G(s)\, \mathrm{d}\mu(s) \\ &= i_A^{\mathfrak{R}_1}(\varphi^{-1}(b)) \int_G f(s)\, i_G^{\mathfrak{R}_1}(s)\, \mathrm{d}\mu(s) \\ &= i_A^{\mathfrak{R}_1}(\varphi^{-1}(b))\ \tilde{i_G^{\mathfrak{R}_1}}(f). \end{aligned}$$

由命题(*),立即可知交叉积 $(A \times_\alpha G)^{\mathfrak{R}_1}$ 和 $(B \times_\beta G)^{\mathfrak{R}_2}$ 是同构的. 证毕.

参 考 文 献

[1] Williams D P. Crossed products of C^* -algebras [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.

[2] Kwaśniewski. Crossed products by endomorphisms of $C_0(X)$ -algebras [J]. J Funct Anal, 2016, 270(6): 2268 - 2335.

[3] Murphy G J. Crossed products of C^* -algebras by endomorphisms [J]. Integral Equ Operator Theor, 1996, 24(3): 298 - 319.

[4] Raeburn I. On crossed products and Takai duality [J]. P Edinburgh Math Soc, 1988, 31(2): 321 - 330.

[5] Svensson C, Tomiyama J. On the commutant of $C(X)$ in C^* -crossed products by Z and their representations [J]. J Funct Anal, 2009, 256(7): 2367 - 2386.

[6] Joita M. Crossed products of locally C^* -algebras [J]. Rocky Mountain J Math, 2007, 37(5): 1623 - 1644.

[7] Guo M Z, Zhang X X. Takesaki-Takai duality theorem in Hilbert C^* -modules [J]. Acta Mathe Sinica English Series, 2004, 20(6): 1079 - 1088.

[8] Pasnicu C, Phillips N C. Crossed products by spectrally free actions [J]. J Funct Anal, 2015, 269(4): 915 - 967.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[9] Wortel M R. Group representations in Banach spaces and Banach lattices [D]. Leiden: The Netherlands Leiden University,2012.

[10] Messerschmidt M. Positive representations on ordered Banach spaces [D]. Leiden: The Netherlands Leiden University, 2013.

[11] Huang L Z, Lu F Y. Reduced crossed products associated with Banach algebra dynamical systems [J]. Integral Equ Operator Theor,2016,84(4): 451 - 462.

[12] 黄利忠. Banach 代数交叉积的万有性质 [J]. 扬州大学学报: 自然科学版,2017,20(1):13 - 17.

[13] Dirksen S, Jeu M D, Wortel M. Extending representations of normed algebras in Banach spaces [A]//Jeu M D, Silvestrov S, Skau C, et al. Operator structures and dynamical systems [C]. Providence, RI: American Mathematical Society,2009: 53 - 72.

Isomorphisms Between Banach Algebra Crossed Products

Huang Lizhong

(Institute of Quantum Information Science, Shanxi Datong University, Datong Shanxi 037009)

Abstract

The isomorphism between two Banach algebra crossed products associated with the equivariantly isomorphic Banach algebra dynamical systems was proved based on the universal property of Banach algebra crossed products.

Key words: Banach algebra dynamical systems, crossed products, equivariantly isomorphism.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net