DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.03.002

首都师范大学学报(自然科学版)
第40卷 第3期 Journal of Capital Normal University No. 3
2019年6月 (Natural Science Edition) Jun.,2019

具有不对称非线性项平面系统周期解的存在性*(下)

马田田

(首都师范大学,北京 100048)

摘要: 本文研究具有非对称项的平面系统

$$\begin{cases} x' = f(y) + p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + p_2(t,x,y) \end{cases}$$

周期解的存在性. 在新的非共振条件下,应用连续性定理证明了该系统至少存在一个周期解.

关键词: 平面系统; 时间映射; 周期解

中图分类号: O175

4 主要引理的证明

由引理3.2可知当 $x_0^2 + y_0^2$ 充分大时,有 $x^2(t) + y^2(t) \neq 0$, $t \in [0,2\pi]$. 这样,可以引进极坐标变换

$$x(t) = r(t)\cos\theta(t), \quad y(t) = r(t)\sin\theta(t).$$

通过极坐标变换,系统(3.1)变形为

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -g(r\cos\theta)\sin\theta + f(r\sin\theta)\cos\theta + \\ \qquad \lambda p_1(t,r,\theta)\cos\theta + \lambda p_2(t,r,\theta)\sin\theta, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -\dfrac{1}{r}g(r\cos\theta)\cos\theta - \dfrac{1}{r}f(r\sin\theta)\sin\theta - \\ \qquad \dfrac{1}{r}\lambda p_1(t,r,\theta)\sin\theta + \dfrac{1}{r}\lambda p_2(t,r,\theta)\cos\theta, \end{cases} \tag{3.2}$$

这里 $p_1(t,r,\theta) = p_1(t,r\cos\theta,r\sin\theta)$, $p_2(t,r,\theta) = p_2(t,r\cos\theta,r\sin\theta)$. 令

$$(r(t),\theta(t)) = (r(t,r_0,\theta_0), \theta(t,r_0,\theta_0))$$

表示系统(3.2)满足初始条件 $r(0,r_0,\theta_0) = r_0$, $\theta(0,r_0,\theta_0) = \theta_0$ 的解,其中 $x_0 = r_0\cos\theta_0$, $y_0 = r_0\sin\theta_0$.

接下来,引进旋转数的定义. 假设 $(x(t), y(t))$ 是系统(3.1)的一个 2π 周期解,且对任意 $t \in [0,2\pi]$,有 $x(t)^2 + y(t)^2 \neq 0$,其相应的极坐标表示为 $(r(t),\theta(t))$. 定义 $(x(t),y(t))$ 的旋转数为

$$n(x,y) = \frac{\theta(0) - \theta(2\pi)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x'(t)y(t) - x(t)y'(t)}{x^2(t) + y^2(t)}dt.$$

根据引理3.4可知当 $x(0)^2 + y(0)^2 \geqslant R_0^2$ 时,有 $n(x,y) \in \mathbf{N}$.

4.1 引理3.4的证明

不失一般性,假定对任意 $j \in \mathbf{N}$,有 $x_j(0)^2 + y_j(0)^2 \geqslant R_0^2$,这里 R_0 是引理3.3中给定的常数. 为简单起见,设 $(x(t),y(t))$ 表示 $(x_j(t),y_j(t))$ $(j = 1,2,\cdots)$ 中的任意一个 2π 周期解. 根据引理3.3可知 $\theta(t)$ 在 $[0,2\pi]$ 上是严格单调递减的,从而存在

$$t_1^1 < t_1^2 < t_1^3 = t_1^2 < t_2^2 < t_3^2 = \cdots = t_1^k < t_2^k < t_3^k = t_1^1 + 2\pi$$

使得

$$x(t_1^i) = 0, \quad x(t_2^i) = 0, \quad x(t_3^i) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,k$$

和

$$x(t) \geqslant 0, t \in [t_1^i, t_2^i]; \quad x(t) \leqslant 0, t \in [t_2^i, t_3^i], \quad i = 1,2,\cdots,k.$$

令 (α,β) 表示 (t_1^i, t_2^i) $(i = 1,2,\cdots,k)$ 中的任意一个区间. 记

$$x_* = x(t_*) = \max\{x(t) : \alpha \leqslant x(t) \leqslant \beta\}.$$

收稿日期: 2018-03-28

* 国家自然科学基金青年基金项目(11501381)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因为 $x'(t_*)=0$,所以 $f(y(t_*))+\lambda p_1(t_*,x(t_*),y(t_*))=0$. 根据条件 (h_4),$|f(y(t_*))|\leqslant M_0$. 由 (h_2)、(h_3) 可知存在 $d_1>0$ 使得 $|y(t_*)|\leqslant d_1$. 根据 (h_2) 可知 $f(y)$ 在区间 $[-d_1,+\infty)$ 上是有下界的,而由 (h_3) 可知 $f(y)$ 在区间 $(-\infty,d_1]$ 上是有上界的. 因此,存在 $\eta>0$ 使得

$$f(y)\geqslant-\eta,\quad y\in[-d_1,+\infty);$$
$$f(y)\leqslant\eta,\quad y\in(-\infty,d_1]. \tag{3.3}$$

下面估计 $t_*-\alpha$. 选取常数 $M>M_0$(M_0 是条件 (h_4) 中的常数). 令

$$M_1=\frac{\eta(M+M_0)+2MM_0}{M-M_0}.$$

显然,$M_1>M_0$. 由 (h_1) 可知存在 $d_2>0$ 使得

$$\operatorname{sgn}(x)g(x)\geqslant M_1,\quad |x|\geqslant d_2. \tag{3.4}$$

定义 $W_+:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,

$$W_+(x,y)=F(y)+G(x)+M(x-y).$$

记

$$W_+(t)=F(y(t))+G(x(t))+M(x(t)-y(t)).$$

则有

$$W'_+(t)=(\lambda p_2(t)+M)f(y(t))+(\lambda p_1(t)+M)g(x(t))+\lambda M(p_1(t)-p_2(t)).$$

若 $x(t)\geqslant d_2$,$y(t)\geqslant-d_1$,则由 (h_4),(3.3) 和 (3.4) 可得

$$W'_+(t)\geqslant(M-M_0)g(x(t))-[\eta(M+M_0)+2MM_0]\geqslant 0.$$

从而当 $(x(t),y(t))$ 位于区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:x\geqslant d_2,y\geqslant-d_1\}$ 中时,$W_+(t)$ 是递增的. 取 $t_\alpha\in(\alpha,t_*)$,$t_\beta\in(t_*,\beta)$ 使得

$$x(t_\alpha)=d_2,x(t)\geqslant d_2,t\in(t_\alpha,t_*),$$

及

$$x(t_\beta)=d_2,x(t)\geqslant d_2,t\in(t_*,t_\beta).$$

因为 $y'(t)=-g(x(t))+\lambda p_2(t,x(t),y(t))$,所以由条件 (h_4) 和 (3.4) 可知当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,有 $y'(t)\leqslant 0$. 进而,$y(t)\geqslant y(t_*)\geqslant-d_1$,$t\in[t_\alpha,t_*]$. 这样,当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,有

$$W_+(t)\leqslant W_+(t_*).$$

因此,

$$F(y(t))+G(x(t))+M(x(t)-y(t))\leqslant F(y(t_*))+G(x_*)+M(x_*-y(t_*)).$$

由于 $|y(t_*)|\leqslant d_1$,故存在常数 $B_1>0$ 使得 $|F(y(t_*))|\leqslant B_1$. 进而可知

$$F(y(t))-My(t)\leqslant[G(x_*)-G(x(t))]+M[x_*-x(t)]+B_1+Md_1. \tag{3.5}$$

取充分小的常数 $0<\varepsilon<\min\{l_+,l_-\}$. 则存在 $M_\varepsilon>0$ 和 $M'_\varepsilon>0$ 使得

$$(l_+-\varepsilon)y-M_\varepsilon\leqslant f(y)\leqslant(l^+-\varepsilon)y+M_\varepsilon,\quad y\geqslant-d_1,$$

及

$$F(y)\geqslant\frac{1}{2}(l_+-\varepsilon)y^2-M_\varepsilon y-M'_\varepsilon,\quad y\geqslant-d_1. \tag{3.6}$$

由 (3.5) 和 (3.6) 可得当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,有

$$(l_+-\varepsilon)y^2(t)-2(M+M_\varepsilon)y(t)\leqslant 2[G(x_*)-G(x(t))]+2M[x_*-x(t)]+B_2,$$

这里 $B_2=2(M_\varepsilon+B_1+Md_1)$. 因此,可得

$$\left(y(t)-\frac{M+M_\varepsilon}{l_+-\varepsilon}\right)^2\leqslant\frac{2}{l_+-\varepsilon}[G(x_*)-G(x(t))]+\frac{2M}{l_+-\varepsilon}[x_*-x(t)]+\left(\frac{M+M_\varepsilon}{l_+-\varepsilon}\right)^2+B_2.$$

故当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,有

$$y(t)\leqslant\sqrt{\frac{2}{l_+-\varepsilon}[G(x_*)-G(x(t))]+\frac{2M}{l_+-\varepsilon}[x_*-x(t)]}+\frac{2(M+M_\varepsilon)}{l_+-\varepsilon}+\sqrt{B_2}.$$

注意到 $x'(t)=f(y(t))+\lambda p_1(t,x(t),y(t))$,由 (h_4) 可知当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,有

$$x'(t)\leqslant\frac{l^+-\varepsilon}{\sqrt{l_+-\varepsilon}}\cdot\sqrt{2[G(x_*)-G(x(t))]+2M[x_*-x(t)]}+B_3,$$

这里 $B_3=(l^+-\varepsilon)\left(\frac{2(M+M_\varepsilon)}{l_+-\varepsilon}+\sqrt{B_2}\right)+M_\varepsilon+M_0$.

于是,可以得到

$$t_*-t_\alpha\geqslant\frac{\sqrt{l_+-\varepsilon}}{l^+-\varepsilon}\cdot\int_{d_2}^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*)-G(x)]+2M(x_*-x)}+B_3}. \tag{3.7}$$

由 (h_1) 可以推出当 $x_*\to+\infty$ 时,

$$\int_0^{d_2}\frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*)-G(x)]+2M(x_*-x)}+B_3}=o(1).$$

故有

$$\int_{d_2}^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*)-G(x)]+2M(x_*-x)}+B_3}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= \int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3} + o(1).$$

取一个正常数 K. 记

$$\int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3} = J_1 + J_2,$$

其中

$$J_1 = \int_0^{x_* - K} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3},$$

$$J_2 = \int_{x_* - K}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3}.$$

若 $x \in [0, x_* - K]$,则当 x_* 充分大时,有

$$G(x_*) - G(x) + M(x_* - x) \geqslant G(x_*) - G(x_* - K) + MK = [g(\xi_1) + M]K \to +\infty,$$

$$x_* \to \infty,$$

这里 $\xi_1 \in [x_* - K, x_*]$. 因此,当 $x_* \to +\infty$ 时,有

$$J_1 = \int_0^{x_* - K} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3} = \int_0^{x_* - K} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)}(1 + o(1))} = \int_0^{x_* - K} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)}} + o(1).$$

若 $x \in [x_* - K, x_*]$,则有

$$G(x_*) - G(x) + M(x_* - x) = [G(x_*) + Mx_*] - [G(x) + Mx] = [g(\xi_2) + M](x_* - x) \geqslant \mu(x_*)(x_* - x),$$

其中 $\xi_2 \in [x_* - K, x_*]$, $\mu(x_*) = \min\{g(x) + M : x_* - K \leqslant x \leqslant x_*\}$. 显然, $\mu(x_*) \to +\infty$, $x_* \to +\infty$. 从而,可得

$$J_2 = \int_{x_* - K}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3} \leqslant \int_{x_* - K}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2\mu(x_*)(x_* - x)} + B_3} \leqslant \int_{x_* - K}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2\mu(x_*)(x_* - x)}} = \frac{\sqrt{2K}}{\mu(x_*)} \to 0, \quad x_* \to +\infty.$$

易知

$$\int_{x_* - K}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)}} = o(1).$$

根据 J_i ($i = 1, 2$) 的渐近性可知当时 $x_* \to +\infty$,有

$$\int_{d_2}^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)} + B_3} = \int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)}} + o(1). \tag{3.8}$$

由 [5] 中的引理 4 和条件 (τ_0) 可得

$$\int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)] + 2M(x_* - x)}} = \int_0^{x_*} \frac{dx}{\sqrt{2[G(x_*) - G(x)]}} + o(1). \tag{3.9}$$

由(3.7),(3.8) 和 (3.9) 可知当 $x(t_*) \to +\infty$ 时,有

$$t_* - t_\alpha \geqslant \frac{\sqrt{l_+ - \varepsilon}}{l^+ + \varepsilon}\left(\frac{\tau_+}{2} - \varepsilon\right) + o(1).$$

接下来估计 $t_\alpha - \alpha$. 因为 $0 \leqslant x(t) \leqslant d_2$, $\alpha \leqslant t \leqslant t_\alpha$,故由引理 3.2 可知当 $x_* \to +\infty$ 时,有 $\min\{y(t) \mid \alpha \leqslant t \leqslant t_\alpha\} \to +\infty$,进而, $c_\alpha = \min\{f(y(t)) \mid \alpha \leqslant t \leqslant t_\alpha\} \to +\infty$.

对等式 $x'(t) = f(y(t)) + \lambda p_1(t, x(t), y(t))$ 两边在区间 $[\alpha, t_\alpha]$ 上取积分,可得

$$d_2 = \int_\alpha^{t_\alpha} x'(t)\,dt = \int_\alpha^{t_\alpha} f(y(t))\,dt + \lambda \int_\alpha^{t_\alpha} p_1(t, x(t), y(t))\,dt.$$

因此,

$$(c_\alpha - M_0)(t_\alpha - \alpha) \leqslant d_2.$$

于是,当 $x_* \to +\infty$ 时,有

$$t_\alpha - \alpha = o(1).$$

这样,就证明了当 $x_* \to +\infty$ 时,有

$$t_* - \alpha \geqslant \frac{\sqrt{l_+ - \varepsilon}}{l^+ + \varepsilon}\left(\frac{\tau_+}{2} - \varepsilon\right) + o(1).$$

下面估计 $\beta - t_*$. 定义函数 $W_- : R^2 \to R$,

$$W_-(x, y) = F(y) + G(x) + M(x + y).$$

令

$$W_-(t) = F(y(t)) + G(x(t)) + M(x(t) + y(t)).$$

则有

$$W'_-(t) = (\lambda p_2(t) - M) f(y(t)) + (\lambda p_1(t) - M) g(x(t)) + \lambda M(p_2(t) - p_1(t)).$$

若 $x(t) \geqslant d_2$, $y(t) \leqslant d_1$,则由 (h_4),(3.3) 和 (3.4) 可得

$$W'_-(t) = (\lambda p_2(t) + M) f(y(t)) + (\lambda p_1(t) - M) g(x(t)) + \lambda M(p_1(t) + p_2(t)) \leqslant$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(M+M_0)\eta+(M_0-M)g(x(t))+2M_0M\leqslant 0.$$

由此可知当 $(x(t),y(t))$ 位于区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x\geqslant d_2, y\leqslant d_1\}$ 中时, $W_-(t)$ 是递减的. 应用估计 $t_*-\alpha$ 的方法,可以推得

$$\beta-t_*\geqslant\frac{\sqrt{l_--\varepsilon}}{l^-+\varepsilon}\left(\frac{\tau_+}{2}-\varepsilon\right)+o(1).$$

因此,当 $x_*\to+\infty$ 时,有

$$\beta-\alpha\geqslant\left(\frac{\sqrt{l_+-\varepsilon}}{l^++\varepsilon}+\frac{\sqrt{l_--\varepsilon}}{l^-+\varepsilon}\right)\left(\frac{\tau_+}{2}-\varepsilon\right)+o(1).$$

因为 (α,β) 代表任意一个 (t_1^i,t_2^i), $i=1,2,\cdots,k$, 所以,得到

$$\sum_{i=1}^{k}(t_2^i-t_1^i)\geqslant k\left(\frac{\sqrt{l_+-\varepsilon}}{l^++\varepsilon}+\frac{\sqrt{l_--\varepsilon}}{l^-+\varepsilon}\right)\left(\frac{\tau_+}{2}-\varepsilon\right)+o(1).$$

应用同样的方法可以推得

$$\sum_{i=1}^{k}(t_3^i-t_2^i)\geqslant k\left(\frac{\sqrt{l_+-\varepsilon}}{l^++\varepsilon}+\frac{\sqrt{l_--\varepsilon}}{l^-+\varepsilon}\right)\left(\frac{\tau_-}{2}-\varepsilon\right)+o(1).$$

故有

$$2\pi=\sum_{i=1}^{k}(t_2^i-t_1^i)+\sum_{i=1}^{k}(t_3^i-t_2^i)\geqslant k\left(\frac{\sqrt{l_+-\varepsilon}}{l^++\varepsilon}+\frac{\sqrt{l_--\varepsilon}}{l^-+\varepsilon}\right)\left(\frac{\tau_++\tau_-}{2}-2\varepsilon\right)+o(1).$$

令 $\varepsilon\to 0$, 可得

$$\tau_++\tau_-\leqslant\frac{4\pi}{kl_*}.$$

4.2 引理 3.5 的证明

沿用证明引理 3.5 时的记号,先估计 $\beta-\alpha$. 定义 $U_+:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$,

$$U_+(x,y)=F(y)+G(x)-M(x-y).$$

令

$$U_+(t)=F(y(t))+G(x(t))-M(x(t)-y(t)).$$

若 $x(t)\geqslant d_2$, $y(t)\geqslant -d_1$, 则由 (h_4), (3.3) 和 (3.4) 可得

$$\begin{aligned}U'_+(t)&=(\lambda p_2(t)-M)f(y(t))+(\lambda p_1(t)-M)g(x(t))-\lambda M(p_2(t)-p_1(t))\\&\leqslant(M+M_0)\eta+(M_0-M)g(x(t))+2MM_0\leqslant 0.\end{aligned}$$

因此,当 $(x(t),y(t))$ 位于区域 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2: x\geqslant d_2, y\geqslant -d_1\}$ 中时, $U_+(t)$ 是递减的. 从而,当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,

$$U_+(t)\geqslant U_+(t_*).$$

由此可知当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,

$$F(y(t))+G(x(t))-M(x(t)-y(t))\geqslant F(y(t_*))+G(x_*)-M(x_*-y(t_*)).\tag{3.10}$$

根据引理 3.5 的证明可知存在一个常数 $B_1>0$ 使得 $|F(y(t_*))|\leqslant B_1$. 由 (3.10) 可得

$$F(y(t))+My(t)\geqslant(G(x_*)-G(x(t)))-M(x_*-x(t))-M_1, t\in[t_\alpha,t_*],\tag{3.11}$$

这里 $M_1=B_1+Md_1$. 对充分小的 $0<\varepsilon<\min\{l_+,l_-\}$, 存在 $M_\varepsilon>0$ 使得当 $y\geqslant -d_1$ 时,

$$(l_+-\varepsilon)y-M_\varepsilon\leqslant f(y)\leqslant(l^++\varepsilon)y+M_\varepsilon.\tag{3.12}$$

进而,存在 $M_2>0$ 使得当 $y\geqslant -d_1$ 时,

$$F(y)\leqslant\frac{1}{2}(l^++\varepsilon)y^2+M_\varepsilon y+M_2.\tag{3.13}$$

于是,由 (3.11) 和 (3.13) 可推出当 $t\in[t_\alpha,t_*]$ 时,

$$(l^++\varepsilon)y^2(t)+2(M+M_\varepsilon)y(t)\geqslant 2(G(x_*)-G(x(t)))-2M(x_*-x(t))-2(M_1+M_2).$$

故有

$$\left(y(t)+\frac{M+M_\varepsilon}{l^++\varepsilon}\right)^2\geqslant\frac{2}{l^++\varepsilon}[G(x_*)-G(x(t)))-M(x_*-x(t))]-B'_2,\tag{3.14}$$

其中 $B'_2=\left(\frac{M+M_\varepsilon}{l^++\varepsilon}\right)^2+\frac{2(M_1+M_2)}{l^++\varepsilon}$. 取一个常数 $L>0$. 若 $x(t)\in[d_2,x_*-L]$, 则由 (h_1) 可知

$$\begin{aligned}&G(x_*)-G(x(t))-M(x_*-x(t))\\&=[G(x_*)-Mx_*]-[G(x(t))-Mx(t)]\\&\geqslant[G(x_*)-Mx_*]-[G(x_*-L)-M(x_*-L)]\\&=[G(x_*)-G(x_*-L)]-ML\\&=[g(\xi)-M]L\to+\infty,\ \text{当 } x_*\to+\infty,\end{aligned}\tag{3.15}$$

这里 $\xi\in[x_*-L,x_*]$. 因此,存在常数 $C_1>0$ 使得当 $x_*\geqslant C_1$ 并且 $x(t)\in[d_2,x_*-L]$ 时,

$$G(x_*)-G(x(t))-M(x_*-x(t))>l^+B'_2.\tag{3.16}$$

由 (3.14) 和 (3.16) 可知当 $x(t)\in[d_2,x_*-L]$ 时,有

$$y(t)\geqslant\sqrt{\frac{2}{l^++\varepsilon}[G(x_*)-G(x(t)))-M(x_*-x(t))]-B'_2}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$-\frac{M+M_\varepsilon}{l^+ +\varepsilon}.$$

因为 $x'(t)=f(y(t))+\lambda p_1(t,x(t),y(t))$，所以由(3.12)可推得

$$x'(t)\geqslant\frac{l_+-\varepsilon}{\sqrt{l^+ +\varepsilon}}\cdot\sqrt{2(G(x_*)-G(x(t)))-2M(x_*-x(t))-(l^+ +\varepsilon)B'_2}-B'_3,$$

其中 $B'_3=\frac{(l_+-\varepsilon)(M+M_\varepsilon)}{l^+ +\varepsilon}+M_\varepsilon+M_0$. 类似地，存在 $C_2\geqslant C_1$ 使得当 $x_*\geqslant C_2$，并且 $x(t)\in[d_2,x_*-L]$ 时，有

$$x'(t)\geqslant\frac{l_+-\varepsilon}{\sqrt{l^+ +\varepsilon}}\cdot\sqrt{2(G(x_*)-G(x(t)))-2M(x_*-x(t))-(l^+ +\varepsilon)B'_2}-B'_3>0.$$

令 $t_1\in[t_\alpha,t_*]$ 使得 $x(t_1)=x_*-L$. 则可得

$$t_1-t_\alpha\leqslant\frac{\sqrt{l^+ +\varepsilon}}{l_+-\varepsilon}\int_{d_2}^{x_*-L}\cdot\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))-2M(x_*-x)-(l^+ +\varepsilon)B'_2}-B'_3}.$$

由(3.15)和[6]中引理4可知当 $x_*\to+\infty$ 时，有

$$\begin{aligned}&\int_{d_2}^{x_*-L}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))-2M(x_*-x)-(l^+ +\varepsilon)B'_2}-B'_3}\\&=\int_{d_2}^{x_*-L}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))-2M(x_*-x)-(l^+ +\varepsilon)B'_2}}+o(1)\\&=\int_{d_2}^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))-2M(x_*-x)}}+o(1)\\&=\int_{0}^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))-2M(x_*-x)}}+o(1)\\&=\int_{0}^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))}}+o(1).\end{aligned}$$

因此，当 $x_*\to+\infty$ 时，得到

$$t_1-t_\alpha\leqslant\frac{\sqrt{l^+ +\varepsilon}}{l_+-\varepsilon}\int_0^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))}}+o(1).\tag{3.17}$$

接下来，估计 t_*-t_1. 对等式 $x'(t)=f(y(t))+\lambda p_1(t,x(t),y(t))$ 两边在区间 $[t_1,t_*]$ 积分可得

$$L=\int_{t_1}^{t_*}x'(t)\,dt=\int_{t_1}^{t_*}f(y(t))\,dt+\lambda\int_{t_1}^{t_*}p_1(t,x(t),y(t))\,dt.$$

故有

$$\int_{t_1}^{t_*}f(y(t))\,dt\leqslant L+2\pi M_0.$$

另一方面，由(3.12)可知

$$\int_{t_1}^{t_*}f(y(t))\,dt\geqslant(l^- -\varepsilon)\int_{t_1}^{t_*}y(t)\,dt-2\pi M_\varepsilon.$$

从而，

$$\int_{t_1}^{t_*}y(t)\,dt\leqslant\frac{L+2\pi(M_0+M_\varepsilon)}{l^- -\varepsilon}.\tag{3.18}$$

对等式 $y'(t)=-g(x(t))+\lambda p_2(t,x(t),y(t))$ 两边在区间 $[t,t_*]$($t\in[t_1,t_*]$)上积分，可得

$$y(t)=y(t_*)+\int_t^{t_*}g(x(t))\,dt-\lambda\int_t^{t_*}p_2(t,x(t),y(t))\,dt\geqslant\nu(x_*)(t_*-t)-2\pi M_0-d_1,$$

这里 $\nu(x_*)=\min\{g(x)\mid x\in[x_*-L,x_*]\}$. 显然，当 $x_*\to+\infty$ 时，$\nu(x_*)\to+\infty$. 因此，

$$\int_{t_1}^{t_*}y(t)\,dt\geqslant\frac{1}{2}\nu(x_*)(t_*-t_1)^2-(2\pi M_0+d_1)(t_*-t_1).\tag{3.19}$$

根据(3.18)和(3.19)可知当 $x_*\to+\infty$ 时，

$$t_*-t_1=o(1).$$

结合(3.17)可得

$$t_*-t_\alpha\leqslant\frac{\sqrt{l^+ +\varepsilon}}{l_+-\varepsilon}\int_0^{x_*}\frac{dx}{\sqrt{2(G(x_*)-G(x))}}+o(1)\leqslant\frac{\sqrt{l^+ +\varepsilon}}{l_+-\varepsilon}\left(\frac{\tau^+}{2}+\varepsilon\right)+o(1).$$

由引理3.5的证明可知 $t_\alpha-\alpha=o(1)$，$x_*\to+\infty$.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因此，得到当 $x_* \to +\infty$ 时，有

$$t_* - \alpha \leqslant \frac{\sqrt{l^+ + \varepsilon}}{l_+ - \varepsilon}\left(\frac{\tau^+}{2} + \varepsilon\right) + o(1).$$

为了估计 $\beta - t_*$，引进另一个函数 $U_- : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$，

$$U_-(x,y) = F(y) + G(x) - M(x+y).$$

令

$$U_-(t) = F(y(t)) + G(x(t)) - M(x(t) + y(t)).$$

若 $x(t) \geqslant d_2$，$y(t) \leqslant d_1$，则由 (h_4)，(3.3) 和 (3.4) 可得

$$U'_-(t) = (\lambda p_2(t) - M) f(y(t)) + (\lambda p_1(t) + M) g(x(t)) - \lambda M(p_1(t) + p_2(t)) \geqslant -\eta(M_0 + M) + g(x(t))(M - M_0) - 2M_0 M \geqslant 0.$$

由此可知当 $(x(t), y(t))$ 位于区域 $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \geqslant d_2, y \leqslant d_1\}$ 中时，$U_-(t)$ 是递增的. 应用估计 $t_* - \alpha$ 的方法，可以得到当 $x_* \to +\infty$ 时，有

$$\beta - t_* \leqslant \frac{\sqrt{l^- + \varepsilon}}{l_- - \varepsilon}\left(\frac{\tau^+}{2} + \varepsilon\right) + o(1).$$

因此，

$$\beta - \alpha \leqslant \left(\frac{\sqrt{l^+ + \varepsilon}}{l_+ - \varepsilon} + \frac{\sqrt{l^- + \varepsilon}}{l_- - \varepsilon}\right)\left(\frac{\tau^+}{2} + \varepsilon\right) + o(1).$$

因为 (α,β) 代表任何一个区间 (t_1^i, t_2^i)，$i = 1,2,\cdots,k$，所以，得到

$$\sum_{i=1}^{k}(t_2^i - t_1^i) \leqslant k\left(\frac{\sqrt{l^+ + \varepsilon}}{l_+ - \varepsilon} + \frac{\sqrt{l^- + \varepsilon}}{l_- - \varepsilon}\right)\left(\frac{\tau^+}{2} + \varepsilon\right) + o(1).$$

类似地，可以推得

$$\sum_{i=1}^{k}(t_3^i - t_2^i) \leqslant k\left(\frac{\sqrt{l^+ + \varepsilon}}{l_+ - \varepsilon} + \frac{\sqrt{l^- + \varepsilon}}{l_- - \varepsilon}\right)\left(\frac{\tau^-}{2} + \varepsilon\right) + o(1).$$

于是，当 $x_* \to +\infty$ 时，有

$$2\pi = \sum_{i=1}^{k}(t_2^i - t_1^i) + \sum_{i=1}^{k}(t_3^i - t_2^i) \leqslant k\left(\frac{\sqrt{l^+ + \varepsilon}}{l_+ - \varepsilon} + \frac{\sqrt{l^- + \varepsilon}}{l_- - \varepsilon}\right)\left(\frac{\tau^+ + \tau^-}{2} + \varepsilon\right) + o(1).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，可得 $\tau^+ + \tau^- \geqslant \frac{4\pi}{kl^*}$.

5 定理 1.1 的证明

只需验证连续性定理 2.1 的 4 个条件都满足即可，分 4 步进行验证.

(1) 存在常数 $D > 0$ 使得若 $(x(t), y(t))$ 是系统

$$x' = f(y), y' = -g(x) \tag{4.1}$$

的任意 2π 周期解，则有

$$x^2(t) + y^2(t) \leqslant D^2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

事实上，系统 (4.1) 的首次积分可以表示为

$$\Gamma_c : F(y) + G(x) = c,$$

这里 $F(y)$，$G(x)$ 是在第三节中定义的函数，c 是一个任意常数. 易知当 $c > 0$ 充分大时，Γ_c 一条围绕原点的星型闭曲线. 对充分大的 c，用 $(x_c(t), y_c(t))$ 表示系统 (4.1) 位于曲线 Γ_c 的周期解，其最小周期记为 $T(c)$. 由引理 3.5 和引理 3.6 的证明 ($\lambda = 0$ 的情形) 可知对任意充分小的 $\varepsilon(0 < \varepsilon < \min\{l_+, l_-\})$ 和充分大的 $c > 0$，有

$$\left(\frac{\sqrt{l_+ - \varepsilon}}{l^+ + \varepsilon} + \frac{\sqrt{l_- - \varepsilon}}{l^- + \varepsilon}\right)\left(\frac{\tau_+ + \tau_-}{2} - 2\varepsilon\right) + o(1) \leqslant T(c) \leqslant \left(\frac{\sqrt{l^+ + \varepsilon}}{l_+ - \varepsilon} + \frac{\sqrt{l^- + \varepsilon}}{l_- - \varepsilon}\right)\left(\frac{\tau^+ + \tau^-}{2} + 2\varepsilon\right) + o(1).$$

根据条件 (τ_0) 可以取充分小的 ε 使得当 c 充分大时，有

$$\frac{2\pi}{n+1} < T(c) < \frac{2\pi}{n}.$$

设 $(x(t), y(t))$ 是位于曲线 Γ_c 的一个 2π 周期解，则存在一个整数 $k > 0$ 使得 $kT(c) = 2\pi$. 从而，$n < k < n+1$. 这是一个矛盾.

(2) 定义 $F : \mathbf{R}^3 \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$，

$$F(t,x,y;\lambda) = (f(y) + \lambda p_1(t,x,y), -g(x) + \lambda p_2(t,x,y)).$$

则有

$$F(t,x,y;0) = (f(y), -g(x)) \triangleq \mathscr{F}(x,y)$$

$$F(t,x,y;1) = (f(y) + p_1(t,x,y), -g(x) + p_2(t,x,y)).$$

由 (h_2)、(h_3) 可得

$$\lim_{|y| \to \infty} \operatorname{sgn}(y) f(y) = +\infty. \tag{4.2}$$

根据 (4.2) 和 (h_1) 可推出当 r 充分大时，$d(\mathscr{F}, B(0, r), 0) = 1$.

(3) 证明对任意 $r_1 > 0$，存在 $r_2 \geqslant r_1$ 使得若系统 (3.1) 的任意一个 2π 周期解 $(x(t), y(t))$ 满足 $\min_{[0,2\pi]}(x^2(t) + y^2(t)) \leqslant r_1^2$ 时，则必有 $\max_{[0,2\pi]}(x^2(t) + y^2(t)) \leqslant r_2^2$.

假定存在 $r_1 > 0$ 和系统 (3.1) 的一个 2π 周期解序列 $\{(x_k(t), y_k(t))\}$，满足 $\min_{[0,2\pi]}(x_k^2(t) + y_k^2(t)) \leqslant r_1^2$，但是，$\max_{[0,2\pi]}(x_k^2(t) + y_k^2(t)) \to \infty$，$k \to \infty$. 根据引理 3.2 的第一个结论可以得出 $x_k^2(0) + y_k^2(0) \to \infty$，$k \to \infty$. 令 $R_1 = 1 + r_1$. 由引理 3.2 的第二个结论可知存在 $R_2 > R_1$ 使得若 $x_k^2(0) + y_k^2(0) \geqslant R_2^2$，则有 $x_k^2(t) + y_k^2(t) \geqslant R_1^2 > r_1^2$，

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$t \in [0,2\pi]$. 这是一个矛盾.

(4) 最后证明对任意正整数 k,存在常数 $\varrho_k > 0$ 使得若 $(x(t),y(t))$ 是系统(3.1)一个 2π 周期解,且其旋转数 $n(x,y) = k$,则 $\min_{t\in[0,2\pi]}(x^2(t) + y^2(t)) \leqslant \varrho_k^2$.

反设若存在正整数 k_0 和系统(3.1)的一个 2π 周期解序列 $\{(x_i(t),y_i(t))\}$,满足 $n(x_i,y_i) = k_0$,$(i = 1,2,\cdots)$,并且 $\lim_{i\to+\infty}(\min_{t\in[0,2\pi]}(x_i^2(t) + y_i^2(t))) = +\infty$. 则根据引理 3.4 和引理 3.5 可得

$$l_*(\tau_+ + \tau_-) \leqslant \frac{4\pi}{k_0} \leqslant l^*(\tau^+ + \tau^-). \quad (4.3)$$

由 (τ_0) 可知

$$l_*(\tau_+ + \tau_-) > \frac{4\pi}{n+1}, \quad l^*(\tau^+ + \tau^-) < \frac{4\pi}{n}. \quad (4.4)$$

由(4.3)和(4.4)可得 $n < k_0 < n+1$. 这是一个矛盾. 至此,本研究已证明了定理 2.1 的 4 个条件都得到了满足,根据定理 2.1 系统(1.1)至少存在一个 2π 周期解.

注记 4.1 定理 1.2 可以用类似证明定理 1.1 的方法证明. 事实上,在定理 1.2 的条件下,连续性定理 2.1 的前 3 个条件任然成立. 由引理 3.4 和条件 (τ_1) 可证得条件(4)也成立. 因此,连续性定理 2.1 的 4 个条件都成立,从而,系统(1.1)至少存在一个 2π 周期解.

参 考 文 献

[1] BOSCAGGIN A. Subharmonic solutions of planar Hamiltonian systems: a rotation number approach [J]. Adv Nonlinear Stud, 2011,11: 77 – 103.

[2] CAPIETTO A, MAWHIN J, ZANOLIN F. A continuation approach to superlinear boundary value problems [J]. J Differential Equations, 1990,88: 347 – 395.

[3] CAPIETTO A, WANG Z. Periodic solutions of Liénard equations with asymmetric nonlinearities at resonance [J]. J London Math Soc, 2003,68: 119 – 132.

[4] CAPIETTO A, DAMBRSIO W, MA T, et al. Unbounded solutions and periodic solutions of perturbed isochronous Hamiltonian systems at resonance [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2013,33: 1835 – 1856.

[5] DING T, IANNACCI R, ZANOLIN F. Existence and multiplicity results for periodic solutions of semilinear Duffing equations [J]. J Differential Equations, 1993,105: 364 – 409.

[6] DING T, ZANOLIN F. Time maps for the solvability of periodically perturbed nonlinear Duffing equations [J]. Nonlinear Anal, 1991,7: 635 – 653.

[7] DRABEK P, INVERNIZZI S. On the periodic boundary value theorem for forced Duffing equation with jumping nonlinearity [J]. Nonlinear Anal,1986, 10: 643 – 650.

[8] FONDA A, SFECCI A. A general method for the existence of periodic solutions of differential systems in the plane [J]. J Differential Equations, 2012,252: 1369 – 1391.

[9] FONDA A. Positively homogeneous Hamiltonian systems in the plane [J]. J Differential Equations, 2004,200: 162 – 184.

[10] FONDA A, MAWHIN J. Planar differential systems at resonance [J]. Adv Differential Equations, 2006,11: 1111 – 1133.

[11] FUCIK S. Solvability of nonlinear equations and boundary value problems [M]. Boston: Reidel, 1980.

[12] QIAN D. Infinity of subharmonics for asymmetric Duffing equations with the Lazer-Leach-Dancer condition [J]. J Differential Equations, 2001,171: 233 – 250.

[13] LAZER A C, MCKENNA P J. Existence, uniqueness and stability of oscillators in differential equations with asymmetric nonlinearities [J]. Trans Amer Math Soc, 1989,315: 721 – 739.

[14] ALONSO J M, ORTEGA R. Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator. [J]. J Differential Equations,1998, 143: 201 – 220.

[15] DANCER N. Boundary value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations [J]. Bull Austral Math Soc, 1976,15: 321 – 328.

[16] WANG Z, MA T. Infinitely many periodic solutions of planar Hamiltonian systems via Poincaré-Birkhoff theorem [J].

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Boundary Value Problems, 2018 (102): 1 - 19.

[17] KRASNOSEL′SKII M A. The Operator of translation along the trajectories of Differential Equations [M]. R I: Amer Math Soc, Providence, 1968.

Periodic Solutions of Planar Systems with Asymmetric Nonlinearities

MA Tiantian

(Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: In this paper, we study the existence of periodic solutions of planar systems of the type

$$\begin{cases} x' = f(y) + p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + p_2(t,x,y). \end{cases}$$

By using the continuation theorem, we prove that the given system has at least one periodic solution provided that some new non-resonant conditions hold.

Keywords: planar systems; time map; periodic solution

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net