DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.03.007

从物理学中数学常数e思考数学之自然属性

张立新

(江苏省如皋高等师范学校 数理系,江苏如皋 226500)

摘 要

自然界的基本数学常数有两个,一个是圆周率π,另一个就是e,相对于常数π来说常数e更为抽象,常数e诞生于指数函数或对数函数的求导数过程. 常数e与物理学有密切联系,物质运动规律中频频活跃着e的身影,由此启发笔者探索思考数学的自然属性问题.

关键词: 常数e,指数函数的导数,自然对数的底,数学的自然属性.

中图分类号: O4-4

人们所熟悉的自然界的基本数学常数有两个,一个是圆周率π,另一个就是常数e. 对于常数π的研究可以追溯到数学文化发展起源的遥远古代;而常数e的发现只有400年左右的历史. π来自直观的几何圆形,人们容易理解接受;e的起源就没有那么清晰了,我们很难找到生活中关于e的具体形象事例,一般认为它产生于指数函数或对数函数的求导数过程. 求导数就是求极限,在计算极限的过程中出现了该常数. 相对于π来说常数e更为抽象,其驰骋于数学沙场的戎马生涯也颇为传奇. 虽说e是数学常数,但与自然科学特别是物理学有着密切联系,在数学语言表述的自然规律中频频活跃着e的身影.

1 常数e的来源

常数π表示圆的周长与直径的比值,它的近似值可通过测量工具获得,且π≈3.14,就是说圆的周长是直径的3倍多一点. 但是我们不能通过任何测量工具来获得e的近似值,只能从纯数学的角度给出e的源头,常数e可用下列函数的极限表示:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

若借助于代换y=1/x,则x→∞时,便有

y→0,于是上式也可写成如下等价形式:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}=e$$

但问题到此并未结束,人们还会进一步追问"在什么数学背景下提出这个特殊极限的呢?"要理顺这些问题需要追溯到微积分创立之初、追溯到导数概念与常见函数的求导过程.

自然界的物体如果做有序运动那么它的运动规律一般可以用数学函数表示,简单情况下是一元函数,通常情况为多元函数. 在已知物质运动函数的基础上人们还需要进一步知道函数相对于自变量的变化率,微积分学中称为求导数. 自然科学的许多问题都可以归结为数学上的求导问题. 因此,计算常见函数的导数是高等数学的基本任务. 指数函数属于常用的初等函数,是某些物质运动所遵循的数学规律. 其函数表达为:

$$y=a^{x}$$

从函数表达式容易看出,这个函数与e没有丝毫牵扯,然而在求导过程中出现了一个奇妙的极限:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$$

若令 $a^{\Delta x}-1=\mu$

则有 $\Delta x=\log_a(1+\mu)$

又当 $\Delta x\to 0$ 时,$\mu\to 0$

于是
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=\lim_{\mu\to 0}\frac{\mu}{\log_a(1+\mu)}$$
$$=\lim_{\mu\to 0}\frac{1}{\log_a(1+\mu)^{1/\mu}}$$

请注意,一个特殊极限出现了:

收稿日期: 2014-06-24

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\lim_{\mu\to 0}(1+\mu)^{1/\mu}=e$$

其极限值就是 e 常数[1]. 此时需要稍微停一刻儿,同学们一定有兴趣知道 e 的具体数值,我们不妨设定那趋向于无穷小的量 μ 为一个很小的数值,比如令 $\mu=10^{-6}$代入上面极限式,用手边的计算器立刻求得 e 的数值:

$$e=(1+Exp-6)\ \wedge\ Exp6\approx 2.71828$$

还可以将 μ 取得更小、更更小,试试看 e 的数值是否逐渐收敛于一个恒定常数?

至此得到指数函数的导数是:

$$y'=\frac{a^x}{\log_a e}$$

我们发现,在指数函数求导的过程中自然而然地与 e 结上了关系! 再利用换底公式,将底 a 变换成 e 做底,表达式变得更简洁:

$$\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

最后得到指数函数的导数:

$$y'=a^x\ln a$$

ln a 表示以常数 e 做底,称为自然对数. 特殊地当 a =e 时,原函数与它的导函数相等:

$$y=e^x$$

$$y'=e^x$$

可见当我们对普通的指数函数求导数时必然出现常数 e,要知道指数函数是基本的函数、是自然界某些物质运动所遵守的数学关系,计算它的导数也是很平常的事情. 指数函数与对数函数有密切联系,在对数函数求导数过程中也会出现常数 e.

2 物质运动规律中的常数 e

常数 e 隐含在物质运动的数学方程中. 描述物质运动规律的函数,如果是指数函数或对数函数的话,那么最简洁的表达式必定是而且只能是以 e 为底的函数. 以 e 为底的对数之所以叫“自然对数”,正因为它反映了物质运动的“自然规律”之缘故. 数学语言描述自然规律需要采用理想化方法概括出事物对象的理想模型和理想过程,由此得出的结论与现实情况有一定差距,这可以在理想化基础上根据实践测量做出修正. 我们不能因为理论与现实存在差距而否认理想化方法的科学性和逻辑性,更加不可能由此否认从宇观宏观到微观的自然界物质运动存在着结构与秩序.

2.1 鹦鹉螺外壳与常数 e

人们发现,自然界的某些物体身上含有天然的对数螺线,比如鹦鹉螺的外壳就是很精确的对数螺线. 对数螺线的函数中含有神奇常数 e. 如果用极坐标表示对数螺线,则表达式为:

$$r=e^{k\theta}$$

其中极角 θ 是自变量,极径 r 是函数,画出的图像乃是渐旋渐开的曲线,就像渐开的美丽花朵. 常数 k 决定了曲线极径 r 的增长速率.

“螺线等角”是对数螺线的一个重要性质. 任何一条极径与螺线相交,过交点的切线与极径的夹角总是处处相等. 如图 1 所示,切线与极径的夹角总是等于 α. 同学们知道,宇宙中几何“圆”出现的机会很多. 实际上圆属于对数螺线的特例,圆是增长速率 k =0、切线与极径的夹角恒等于 π/2 的对数螺线. 事实上将 k =0 代入方程 $r=e^{k\theta}$,我们得到 $r=e^0=1$,也就是单位圆的极坐标方程[2].

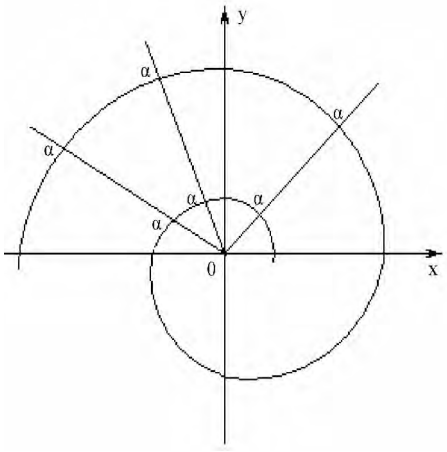


图 1

自然界的对数螺线还有羊的触角、向日葵种籽的排列、宇宙中螺线状星云等等. 面对天然的对数螺线我们要赞美大自然之天工神斧的数学杰作!

2.2 火箭飞行与常数 e

火箭技术的发展使人类成功地发射了人造地球卫星和各种航天器,开创了探索宇宙太空的时代. 上世纪初,科学家在动量守恒定律定律的基础上建立了火箭运动的数学方程,并证明了多级火箭可以克服地球引力而进入太空,奠定了航天学的理论基础. 火箭飞行时所能达到的末速度由下列方程决定:

$$v=u\ln\frac{M_0}{M}$$

式中 M_0表示火箭壳加燃料的总质量; M 表示燃料烧完后火箭壳的质量; u 表示气体相对于火箭的喷射速度. 此式说明: 火箭能够达到的末速度与气体的喷

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

射速度成正比; 与质量比(M_0/M) 的自然对数成正比. 可看太空飞行的火箭也离不开神奇常数 e 的鼎力相助. 以 e 为底的自然对数的真数(M_0/M) 很重要, 它决定了火箭飞行的最终速度. 现在单级火箭的质量比可以做到 15, 液氧加液氢的喷气速度可达到 4.1 km/s, 计算得到理想情况下单级火箭可获得的末速度约为 11 km/s. 但火箭发射时要受到地球引力和空气阻力, 其末速度只能达到 7 km/s 左右, 它小于第一宇宙速度 7.9 km/s, 即使用单级火箭不能将航天器送入轨道, 因此一般采用三级火箭来完成发送[3].

2.3　电感暂态过程与常数 e

电感器、电容器、晶体管等元件是人工制造的, 人们可以制造各种元件和仪器设备, 但不可以制造规律. 电子在元器件中的运动规律是自然界固有的, 在看不见的电子世界里有常数 e 的伴随.

在电感充磁与放磁的暂态过程中, 线路中电流变化规律与常数 e 关系密切. 如图 2(1) 所示, 当开关 K 接通 1 点时, 电池 E 给电感器通电充磁能. 根据基尔霍夫定律列出微分方程, 解此方程得到电流随时间变化函数是:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

它表示电流按 e 的负指数函数规律变化. 描出的图像如图 2(2), 由图像可知, 开关接通后电流不可能立刻到达最大值($I_m = E/R$), 电流是随时间流逝而逐渐增大的, 时间 t 出现在 e 的指数上, 只有经过足够长的时间电流才能达到最大值.

如图 2(3) 所示, 当开关 K 接通 2 点后, 线圈在释放磁能, 电流将按 e 的指数函数减小, 其数学表达式为:

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

描出的图像见图 2(4). 此时电感器相当于一个瞬时电源, 正极在电感器下端. 从图看出, 电流不会从最大值($I_m = E/R$) 立刻减小为 0, 它随时间 t 的流逝而逐渐减小, 经过一段时间后电流才会降为 0.

上述电感充磁与放磁过程中, 电流随时间变化的两个数学表达式, 可以由通电自感实验与断电自感实验获得验证演示. 与电感暂态过程相对称, 电容器在充电与放电的暂态过程中也存在着类似的数学规律[4]. 常数 e 在电容充放电的数学表达式中同样担当着重要角色.

2.4　熵与常数 e

热力学理论指出: 孤立系统的自发过程总是从

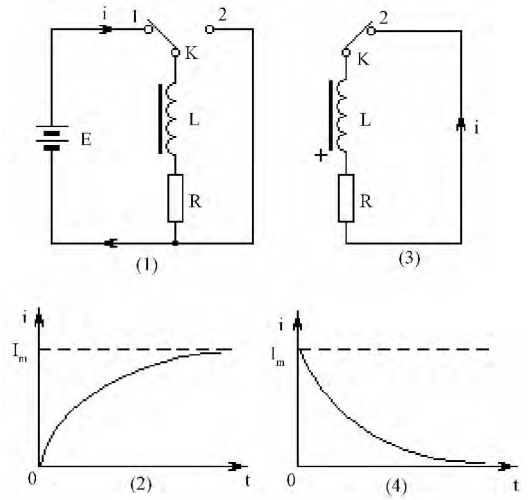


图 2

系统的较小熵值向着系统的极大熵值方向发展; 统计物理学认为: 孤立系统的自然过程总是由热力学概率较小的状态朝着热力学概率极大值状态进行. 显然, 宏观物理量熵(S) 与反映微观状态的热力学概率(Ω) 存在一定的数学联系. 玻耳兹曼从理论上推导出两者间的关系式为:

$$S = k\ln\Omega$$

即宏观物理量熵 S 与热力学概率 Ω 的自然对数成正比[5]. 在热力学理论中, 系统的熵发展到极大值即是平衡态; 在统计物理学中, 平衡态则对应于“热力学概率”的极大值. 玻耳兹曼公式表明分子热运动与常数 e 息息相关.

2.5　常数 e 频频出场之掠影

在地球表面包围着厚厚的大气层, 随着高度的增加空气越来越稀薄, 即单位体积内的分子数变少, 因此空气压强将随着高度的增加而减小. 大气压强 P 随高度 h 的变化规律满足以 e 为底的负指数函数:

$$p = p_0 e^{-\mu gh/RT}$$

放射性现象使物质经过自然衰变后转变成另一物质, 即原物质的原子核放射出质子后转化为一种新原子核. 随时间的流逝, 未衰变的(剩余) 原子核数目将越来越少. 利用剩余原子核数与时间的数学关系可以推算地球上最古老岩石的年龄, 从而推测地球的天文年龄. 剩余核子数 N 随时间 t 的变化规律满足 e 为底的负指数函数:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

物体在空气中下落时, 由于受到重力作用将不断加速. 同时物体还受到阻力作用, 设阻力与速度满

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

足一次函数关系 f = kv,其中 k 为常数. 阻力存在使得下落速度不可能无限增加,当到达某最大速度时物体便做匀速直线运动. 物体下落速度 V 与时间 t 的函数关系满足 e 为底的指数函数:

$$V = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

电感和电容组成的无阻尼电磁振荡是一种理想化电路,实际电路不可避免地存在电阻,因此其振荡总是阻尼的,振荡电压幅值越来越小. 阻尼振荡的电容器上电压满足二阶线性微分方程,求解微分方程可得到电容器上振荡电压 u 随时间 t 变化的函数,它由一个等幅正弦波和一个衰减因子组成,这个衰减因子就是以 e 为底的负指数函数:

$$u = U_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$

实用振荡电路采用正反馈方式,在每个周期给阻尼振荡补充能量以获得等幅振荡.

稳态正弦交流电路的基本定律(基尔霍夫定律等)可用复数相量法简洁表述,且复数法能够方便地求解复杂的交流电路. 在计算过程中需要借助欧拉公式实现复数的指数式与三角函数式之间的转换,在欧拉公式中活跃着常数 e 的熟悉身影:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

量子力学是描述微观带电粒子在电势场中运动规律的科学. 无论是微观粒子对于势垒发生"隧道效应"时呈现出来的波函数以及与波函数对应的概率分布、还是量子统计中的费米 - 狄拉克分布、或者是玻色 - 爱因斯坦分布,这些数学表达式中均含有 e 常数.

在数学中有著名的"五朵金花",即 0、1、i、e、π,常数 e 身在其中. 虽然"五朵金花"由不同的时代不同的人发现,但为奇妙的是,它们居然可以绽开在同一数学等式中:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

可以证明 e 是一个无理数,整数 2 后面跟随着无穷无尽的不循环小数,它的精确表达可藉助于无穷级数呈现. e 的无穷级数使我们看到无理数的"无序"中居然隐含着如此严谨的"有序",这是何等的简洁与优美:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

自然界的物质运动规律中出现常数 e 的机遇很多,本文不再列举,有兴趣的同学可以阅读相关物理学教材和科普书籍.

3 由常数 e 启发的思考

常数 e 在物理学中频频呈现以及自然规律总是以数学形式描述的事实启发我们思考一个问题: 数学是思维的产物还是独立于思维的客观存在? 换句话说数学是人的"发明"还是人的"发现"?

笔者理解: 数学是自然的基本属性,人是自然发展演化到一定阶段产生的智慧生命,人的大脑基因必然携带和传递着自然赋予的一定量信息. 因此人能够在实践中发现和理解自然数学,又可以凭借纯理性思维去创造与发明数学. 人创数学一旦找到对应的自然物质运动即可归属为自然数学了,仿佛人悟之理回归于自然之理. 数学发展到这个环节,也只有发展到这个环节思维的数学方显出真理性: 不仅彰显出逻辑真理性而且反映出存在的真理性. 总之,数学首先是自然的数学然后才是人创的数学; 数学真理既是演绎的真理又是实在的真理; 数学理论既可视为不依赖于任何物质基础的纯思维的结晶,又可理解为抽象符号的逻辑系统对应着客观的物质结构与运动秩序. 因此,有些数学是自然界固有的,如常数 π、常数 e、平面范围的毕达哥拉斯定理等等,他们应该是人类思维的"发现"而不是"发明"; 那些已经发现能与物质运动相对应的数学似乎也应理解为自然蕴涵的,同样是人的"发现"而不是"发明"; 那些还没有找到与自然存在相联系的数学特别是现代抽象数学,现在可以说是人的"创造"与"发明",将来如何再做判定.

数学语言成为全人类科学研究的通用语言并非强制推行而是自然发生的事情,这表明人类对于反映物质运动属性的数学语言是容易达到共识互通的. 仰望无限而深邃的宇宙星空,直觉告诉人们: 天体的运动存在着结构和秩序,而结构和秩序中内涵着数学. 基于这个假设我们不妨做一些猜想: 在无限太空中类似于地球太阳系环境的那些平坦宇宙空间,常数 π、常数 e、毕达哥拉斯定理可能普遍成立; 在既往天文学理论与实践中,人们相信万有引力定律在宇宙中任何两个天体之间普遍成立; 当今人类发射到宇宙太空的飞行器,在一定时空范围内能够成功地采用无线电波同地球联系,可以猜测关于电磁波运动的麦克斯韦方程组理论可能在宇宙空间普遍成立; 由于微观粒子的具有全同性质,地球附近的微观粒子全同于宇宙中的其他天体的微观粒子,描述微观粒子在电势场中运动的薛定谔方程可能在宇

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

宙中普遍成立. 在地球上在银河系边缘,甚至在距离地球 100 亿光年以外的星系上,氢原子的运动方式完全相同[6]. 当然,宇宙某些空间的数学结构也可能不同于地球智慧生命之所发现. 比如在所谓强引力场的弯曲空间,一般认为要以非欧几何学替代欧氏几何学,但常数 e 起源于抽象的"纯代数",与具象的"几何学"没关系,因此强引力场的弯曲空间可能对常数 e 没有影响; 处于太阳辐射的人类居栖的地球空间,人们发现了热力学第二定律,但是追溯到宇宙运动的上古历史,在星云聚汇太阳形成的宇宙空间熵也是增大的吗? 用历史观念看宇宙,在确信自然结构和秩序永恒存在的前提下,假设物质的数学结构和运动规律具有宇观范畴的 "时代性"和"空域性",那么宇宙的熵就不可能时时处处总是增加的,否则就不能从逻辑解释自然界最初的负熵来自何方. 试图把地球附近发现的数学和自然科学规律引申到宇宙空间是需要谨慎的. 无限多样性与复杂性和谐统一的各种天体运动中虽然不一定总是遵循人们在地球太阳系附近发现的规律,但一定有着它们自身运动对应的数学规律. 倘若存在其他宇宙智慧生命的话,对自然数学的探索有可能成为智慧生命之间信息交流的共同基础. 我们相信,随着人类航天事业的发展,未来智慧生命实现星际交往最具可能的语言是揭示物质运动属性的数学语言.

数学与物理学以及全部的自然科学理论是人类发现与创造的文明文化,但发现与创造的物质基础在于大自然. 在自然结构和运动秩序数学化的基础上,不仅数学的实在性与纯思维性能获得辩证理解、物理学以及自然科学理论建构所藉助的数学方法也能得到合理解释,而且全部科学技术发展应用的数学基础、科学实验(物质结构和运动秩序在实验室人工纯粹条件下定量显性再现) 、逻辑学、天文学、生命的起源等等也都能从自然理性秩序中获得具有基础意义的理解诠释.

参 考 文 献

[1] 同济大学数学教研室. 高等数学 - 上册(第三版) [M]. 高等教育出版社,1988: 99 - 100.

[2] [以] 马奥尔. e 的故事: 一个常数的传奇 [M]. 人民邮电出版社,2007: 135 - 136.

[3] 张三慧. 大学物理学 - 力学(第二版) [M]. 清华大学出版社,2002: 143 - 144.

[4] 程守洙 江之永. 普通物理学 - 2(第五版) [M]. 高等教育出版社,2001: 362 - 365.

[5] 张三慧. 大学物理学 - 热学(第二版) [M]. 清华大学出版社,2002: 180 - 181.

[6] [美] 李维. 数学沉思录 - 古今数学思想的发展与演变 [M]. 人民邮电出版社,2013: 269.

From mathematical constant e in Physics Thinking Nature Attribute of Mathematical

Zhang Lixin

(Dpartment of Mathematical and physics, Rugao Normal College 226500)

Abstract

The basic mathematical constants of nature are two, One is π, Another is e. Constant e was born in an exponential or logarithmic function of the number of derivation process. The constant e is closely related with physics, Movement of matter frequently active in constant e figure, So the author explores the nature of inspired mathematical problem.

Key words: Constant e, Derivative of exponential function, The base of natural logarithm, Natural attribute mathematics.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net