DOI:10.19789/j.1004-9398.2023.01.009
文献引用:马利文.数学分析的对数p-级数与对数p-积分[J].首都师范大学学报(自然科学版),2023,44(1):60-67. MA L W. Logarithmic p-serieses and logarithmic p-integrals in Mathematical analysis[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2023,44(1):60-67.

数学分析的对数p-级数与对数p-积分*

马　利　文**

(北京邮电大学理学院数学系,北京　100876)

摘要:为了方便起见,将数项级数$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}$称为对数$p$-级数,将反常积分$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x\,(c>1)$,$\int_a^b\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$和$\int_a^b\frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$称为对数$p$-积分。对数$p$-级数与对数$p$-积分以不同的$k$和$p$的值出现在数学分析课程的各个知识环节中,收敛性随着具体参数k和p而不同,在数学分析和相关后续数学课程中有着很重要的地位。由于各类数学分析教材没有总结归纳出统一的判别其收敛性的公式化结论,导致对数p-级数与对数p-积分不能被学生熟练地掌握和使用。事实上,对数p-级数与对数p-积分的收敛性的判别完全可以公式化,根据k和p的值直接得出,这便弥补了数学分析课程在这些内容上的不足。

关键词:对数p-级数;对数p-积分;无穷积分;瑕积分;收敛性
中图分类号:O173.1　　**文献标识码**:A

Logarithmic p-serieses and logarithmic p-integrals in mathematical analysis*

MA Liwen**

(School of Sciences, Beijing University of Posts and Telecomunications, Beijing　100876)

Abstract: For convenience, the series $\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}$ is called the logarithmic p-series, and the improper integrals $\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x\ (c>1)$, $\int_a^b\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ and $\int_a^b\frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$ are called the logarithmic p-integrals. They appear in various knowledge of mathematical analysis course with different values of k and p and different convergence, and play a very important role in mathematical analysis course and related subsequent mathematics courses. All kinds of mathematical analysis textbooks do not provide uniform formulaic conclusions about convergence of the logarithmic p-series and the logarithmic p-integrals, so that students cannot skillfully use them. In fact, their convergence can be formulated and can be gotten directly from the values of k and p. Therefore, these results complement the lack of such content in mathematical analysis courses.

收稿日期:2022-03-26
* 北京市自然科学基金项目(1222011);北京邮电大学大学研究生教育教学改革重大项目(2021Y008)
** 通信作者:maliwen@bupt.edu.cn

Keywords: logarithmic p-series; logarithmic p-integral; infinite integral; defect integral; convergence
CLC: O173.1　　**DC**: A

0　引　言

在数学分析课程的教学中,判别级数与反常积分的收敛性是重点和难点之一。相对常用的判别方法就是比较判别法。比较判别法不仅是一个非常有效判别法,而且在其基础上建立了一系列更为简便有效的判别法,如达朗贝尔比式法、柯西根式法、拉贝法等[1-2]。应用比较判别法时,需要找熟知的级数或积分,将其通项或被积函数与被判断者进行比较。常用的熟知的级数和积分比较有限,如,p-级数、几何级数和p-积分有现成的公式化的结论,可由通项直接得出其收敛性[3-4]。尽管在数学分析课程中介绍了诸多判断收敛性的方法,但是每种方法都不是万能的,新的判别法不断地被研究和补充[5-7]。数项级数与广义积分的收敛性的判别一直是数学分析学习过程中的重点与难点,相关的内容的深入研究及其在函数项级数与参变量积分中的应用也引起了广泛关注[8-11]。

尤其有这样一类级数和反常积分,由于通项和被积函数含有对数的幂,使得其收敛性的判别过程复杂而难以掌握,称为对数p-级数与对数p-积分,即$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}$,$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x\,(c>1)$,$\int_a^b\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b\frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$。这类级数和积分以不同的 k、p 值的形式频繁地出现在数学分析的各个知识环节,如函数项级数、参变量积分等,在整个数学分析课程和后续数学课程的学习中有着非常重要的地位[12-15]。但是,有关判别此类级数与反常积分收敛性的公式化结论在一般的数学分析教材及辅导教材中并未详细总结与归纳,使得遇到这类级数或积分,需要进行具体分析[16-20]。这便导致学生对这类级数和积分不能清晰地把握,使用时不能得心应手。如果判别对数p-级数与对数p-积分的收敛性也像判别几何级数、p-级数、p-积分一样可以公式化,由通项直接得出的话,分析和解决与之相关的各种问题会更加简便高效。事实上,对数p-级数与对数p-积分的收敛性是有规律可循的,其收敛性的判别法完全可公式化,根据通项的 k、p 值直接得出。因而在用比较法判别其他级数或积分的收敛性时,对数p-级数与对数p-积分也可以作为熟知的一类级数去参与判别。

本文将详细推导对数p-级数与对数p-积分的收敛性判别的公式化结论,并具体举例阐述在数学分析课程中的重要应用,弥补了数学分析课程在这方面讲解的不足。

1　对数p-级数

定义1　形如 $\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}$ 的数项级数称为对数p-级数。

当 $p\leqslant 0$ 时,不论 k 为何值,易知此级数发散;当 $k=0$ 时,对数p-级数为p-级数 $\sum\frac{1}{n^p}$。因而,只讨论 $p>0$ 且 $k\neq 0$ 时的情况。而 $k<0$ 时,此级数又相当于级数 $\sum\frac{1}{n^p(\ln n)^k}(k>0)$。因此,需讨论以下2种情况的对数$p$-级数:

(I) $\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}(p,k>0)$,

(II) $\sum\frac{1}{n^p(\ln n)^k}(p,k>0)$。

定理1　$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}\left(p,k>0\right)$ 型对数p-级数。

(i)当 $p>1$ 时,收敛;

(ii)当 $0<p\leqslant 1$ 时,发散。

证明　(i)$p>1$ 时,取收敛的p-级数 $\sum\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$,又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(\ln n)^k}{n^p}}{\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^k}{n^{\frac{p-1}{2}}}=0$,由比较法知原级数收敛;

(ii)$0<p\leqslant 1$ 时,取发散的p-级数 $\sum\frac{1}{n^p}$,又 $\frac{(\ln n)^k}{n^p}>\frac{1}{n^p}$,由比较法知原级数发散。

注1　由定理1可见,$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}(p,k>0)$ 型对数p-级数与p-级数 $\sum\frac{1}{n^p}(p>0)$ 的敛散性完全相

同,即把p-级数$\sum\frac{1}{n^p}$的通项的分子由1换为无穷大量$(\ln n)^k$后,并不改变其敛散性,更与k的取值无关。

例1 判断下列正项级数的敛散性。

(1)$\sum\frac{\ln n}{n}$;(2)$\sum\frac{(\ln n)^2}{n}$;

(3)$\sum\frac{(\ln n)^{100}}{\sqrt{n}}$;(4)$\sum\frac{(\ln n)^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{3}{2}}}$。

解 (1)发散;(2)发散;(3)发散;(4)收敛。

定理2 $\sum\frac{1}{n^p(\ln n)^k}(p,k>0)$型对数$p$-级数:

(i)当$p>1$时,收敛;

(ii)当$0<p<1$时,发散;

(iii)当$p=1$时:若$k>1$,收敛;若$0<k\leqslant 1$,发散。

证明 (i)$p>1$时,取收敛的p-级数$\sum\frac{1}{n^p}$,又$\frac{1}{n^p(\ln n)^k}<\frac{1}{n^p}$由比较法知原级数收敛。

(ii)$0<p<1$时,取发散的p-级数$\sum\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}$,又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{p(\ln n)^k}}}{\frac{1}{n^{\frac{1+p}{2}}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{1-p}{2}}}{(\ln n)^k}=+\infty$,由比较法知原级数发散。

(iii)当$p=1$时,原级数为$\sum\frac{1}{n(\ln n)^k}(k>0)$。由积分判别法知,若$k>1$,此级数收敛;若$0<k\leqslant 1$,此级数发散。

注2 由定理2可见,$\sum\frac{1}{n^p(\ln n)^k}(p,k>0)$型对数$p$-级数与$p$-级数$\sum\frac{1}{n^p}(p>0)$的敛散性基本相同。当$p\neq 1$时,二者的敛散性完全相同,即把$p$-级数$\sum\frac{1}{n^p}$的通项除以无穷大量$(\ln n)^k$后,不改变其敛散性,更与$k$的值无关,只有$p=1$时,其敛散性才与$k$的值有关。

例2 判断下列正项级数的敛散性。

(1)$\sum\frac{1}{n\ln n}$;(2)$\sum\frac{1}{n(\ln n)^2}$;

(3)$\sum\frac{1}{\sqrt{n}\ (\ln n)^{100}}$;(4)$\sum\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}(\ln n)^{\frac{2}{3}}}$。

解 (1)发散;(2)收敛;(3)发散;(4)收敛。

下面将对数p-级数作为熟知级数,来判断其他级数的敛散性。

例3 判断下列级数的敛散性,收敛的级数进一步判断是否绝对收敛。

(1)$\sum\frac{(\cos\frac{n\pi}{4})^3}{n(\ln n)^3}$;(2)$\sum\frac{(-1)^n}{n\ln n}$;

(3)$\sum\frac{(-1)^n(\ln n)^{100}}{n^2}$;(4)$\sum\frac{(-1)^n\sin n}{n^{1+\alpha}(\ln n)^k}(\alpha,k>0)$。

解 (1)由于$\left|\frac{\left(\cos\frac{n\pi}{4}\right)^3}{n(\ln n)^3}\right|\leqslant\frac{1}{n(\ln n)^3}$,且对数$p$-级数$\sum\frac{1}{n(\ln n)^3}$收敛,则由比较法知原级数绝对收敛。

(2)由莱布尼兹判别法,知此级数收敛。而通项绝对值构成的级数$\sum|\frac{(-1)^n}{n\ln n}|=\sum\frac{1}{n\ln n}$为发散的对数$p$-级数,从而原级数条件收敛。

(3)由于$|\frac{(-1)^n(\ln n)^{100}}{n^2}|\leqslant\frac{(\ln n)^{100}}{n^2}$,且对数$p$-级数$\sum\frac{(\ln n)^{100}}{n^2}$收敛,根据比较法可知原级数绝对收敛。

(4)由$|\frac{(-1)^n\sin n}{n^{1+\alpha}(\ln n)^k}|\leqslant\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^k}$$(\alpha,k>0)$,且$\alpha,k>0$时,对数$p$-级数$\sum\frac{1}{n^{1+\alpha}(\ln n)^k}$收敛,由比较法知原级数绝对收敛。

2 对数p-积分

定义2 形如$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x$$(c>1)$的无穷限积分与形如$\int_a^b\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$,$\int_a^b\frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$的瑕积分称为对数$p$-积分。

2.1 $\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x$ $(c>1)$型对数p-积分的敛散性定理

本小节内容默认$c>1$,后面不再赘述。当

$p\leqslant 0$时,不论k为何值,对数p-积分$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x$发散;当$k=0$时,此积分就是$p$-积分$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$;当$k<0$时,此积分$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x$相当于$k>0$时的积分$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p(\ln x)^k}$。因此,只讨论以下2种情况:

(I)$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$;

(II)$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^k}\,(p,k>0)$。

定理3　$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x\ (p,k>0)$型对数$p$-积分:

(i)当$p>1$时,收敛;

(ii)当$0<p\leqslant 1$时,发散。

证明　(i)$p>1$时,取收敛的p-积分$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}\mathrm{d}x$,

又$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{(\ln x)^k}{x^p}}{\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0$,由比较法知原积分收敛;

(ii)$0<p\leqslant 1$时,取发散的p-积分$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$,又$\frac{(\ln x)^k}{x^p}>\frac{1}{x^p}$,由比较法知原级数发散。

注3　由定理3可以看出,形如$\int_c^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x$的对数$p$-积分与$p$-积分$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,(p>0)$的敛散性完全相同,与$k$的取值无关。

定理4　$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^k}\,(p,k>0)$型对数$p$-积分:

(i)当$p>1$时,收敛;

(ii)当$0<p<1$时,发散;

(iii)当$p=1$时:若$k>1$,收敛;若$0<k\leqslant 1$,发散。

证明　(i)$p>1$时,取收敛的p-积分$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$,又$\frac{1}{x^p(\ln x)^k}<\frac{1}{x^p}$,由比较法知原积分收敛。

(ii)$0<p<1$时,取发散的p-积分$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}\mathrm{d}x$,

又$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^p(\ln x)^k}}{\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1-p}{2}}}{(\ln x)^k}=+\infty$,由比较法知原级数发散。

(iii)当$p=1$时,原积分为$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$。由于

$$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int_c^{+\infty}\frac{1}{(\ln x)^k}\mathrm{d}(\ln x)=\int_{\ln c}^{+\infty}\frac{1}{t^k}\mathrm{d}t,$$

此积分转化为p-积分。

因此,若$k>1$,此积分收敛;若$0<k\leqslant 1$,此积分发散。

注4　由定理4可知,形如$\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^p(\ln x)^k}\,(p,k>0)$的对数$p$-积分与$p$-积分$\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\ (p>0)$的敛散性基本相同。当$p\neq 1$时,二者的敛散性完全相同,与$k$的值无关;只有$p=1$时,其敛散性才与$k$的值有关。

例4　判断下列对数p-积分的敛散性。

(1)$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;(2)$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$;

(3)$\int_2^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x^2}\mathrm{d}x$;(4)$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(\ln x)^{100}}$。

解　(1)发散;(2)收敛;(3)收敛;(4)发散。

2.2　形如$\int_a^b\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$或$\int_a^b\frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$ $(p,k>0)$的对数p-积分的敛散性定理

在本部分的定理证明过程中,需要用到以下结论。

命题1　$\lim\limits_{x\to 0}x^a[\ln x]^b=0\ (a,b>0)$。

证明　由洛必达法则,

$$\lim_{x\to 0}x^a[\ln x]^b=\lim_{x\to 0}\frac{[\ln x]^b}{x^{-a}}=\lim_{x\to 0}\frac{b[\ln x]^{b-1}}{(-a)x^{-a}}=\cdots=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{b(b-1)\cdots(b-[b])}{(-a)(-a-1)\cdots(-a-[b])x^{-a}[\ln x]^{[b]+1-b}}=0,$$

其中$[b]$表示正数b的整数部分。

形如$\int_a^b\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$和$\int_a^b\frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$ $(p,k>0)$的对数p-积分:当$p<0$时,为定积分;当$p=0$时不论k为何值,易知收敛。当$k=0$时,为p-积分$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$和$\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$。因而只讨论以

下2种情况的对数p-积分:

(1) $\int_a^b \frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$;

(2) $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p[\ln(x-a)]^k}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$。

定理5 $\int_a^b \frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$ 型的对数p-积分:

(i)当$0<p<1$时,收敛;

(ii)当$p\geqslant 1$时,发散。

证明 对于固定的k值,被积函数不变号,不妨设被积函数恒正。

(i)$0<p<1$时,取收敛的p-积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\frac{1+p}{2}}}\mathrm{d}x$,

根据命题1,有

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}}{\frac{1}{(x-a)^{\frac{1+p}{2}}}}=\lim_{x\to a}(x-a)^{\frac{1-p}{2}}[\ln(x-a)]^k=0,$$

由比较法知原积分收敛。

(ii)$p\geqslant 1$时,取发散的p-积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$,当$x-a$充分小时,$\frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}>\frac{1}{(x-a)^p}$,由比较法知原积分发散。

注5 由定理5可见,形如 $\int_a^b \frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ $(p,k>0)$ 的对数p-积分与p-积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ $(p>0)$ 的敛散性完全相同,与k的取值无关。

定理6 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p[\ln(x-a)]^k}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$ 型对数p-积分:

(i)当$0<p<1$时,收敛;

(ii)当$p>1$时,发散;

(iii)当$p=1$时:若$k>1$,收敛;若$0<k\leqslant 1$,发散。

证明 不妨设被积函数恒正。

(i)$0<p<1$时,取收敛的p-积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$,

由于$x-a$充分小时,

$$\frac{1}{(x-a)^p[\ln(x-a)]^k}<\frac{1}{(x-a)^p},$$

由比较法知原积分收敛。

(ii)$p>1$时,取发散的p-积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^{\frac{1+p}{2}}}$,

根据命题1,有

$$\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{(x-a)^p[\ln(x-a)]^k}}{\frac{1}{(x-a)^{\frac{1+p}{2}}}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^{\frac{p-1}{2}}[\ln(x-a)]^k}=+\infty,$$

由比较法知原积分发散。

(iii)当$p=1$时,原积分为 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)[\ln(x-a)]^k}$。

在假设被积函数为正值函数时,由于

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)[\ln(x-a)]^k}=$$

$$\int_a^b \frac{1}{[\ln(x-a)]^k}\mathrm{d}[\ln(x-a)]=\int_{-\infty}^{\ln(b-a)}\frac{1}{t^k}\mathrm{d}t,$$

此积分转化为p-积分(此时不妨设$b-a<0$,否则分成两部分,其中一部分为定积分)。因此,若$k>1$,此积分收敛;若$0<k\leqslant 1$,此积分发散。

注6 由定理6可知,形如 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)[\ln(x-a)]^k}$ $(p,k>0)$ 的对数p-积分与p-积分 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}$ $(p>0)$ 的敛散性基本相同。当$p\neq 1$时,二者的敛散性完全相同,与k的值无关。只有$p=1$时,其敛散性才与k的值有关。

用同样的方法可以得到,形如 $\int_a^b \frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$ $(p,k>0)$ 的对数p-积分与 $\int_a^b \frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ $(p,k>0)$ 有类似的结论。

定理7 $\int_a^b \frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$ 型对数p-积分:

(i)当$0<p<1$时,收敛;

(ii)当$p\geqslant 1$时,发散。

定理8 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p[\ln(b-x)]^k}\mathrm{d}x\,(p,k>0)$ 型对数p-积分:

(i)当$0<p<1$时,收敛;

(ii)当$p>1$时,发散;

(iii)当$p=1$时:若$k>1$,收敛;若$0<k\leqslant 1$,发散。

例5　判断下列对数p-积分的敛散性。

(1) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$;(2) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1-x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_1^2 \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$;(4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$。

解　(1)发散;(2)发散;(3)收敛;

(4)由于$x=0$, $x=1$均为被积函数的瑕点,故将此积分分成两部分:

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x,$$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$与对数$p$-积分$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$同敛散,是收敛的;

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$的积函数恒负,取收敛积分$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$,由于$\frac{-\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}$,由比较法知$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$收敛,即$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$收敛。从而原积分收敛。

3　总结与应用

本文所得的公式化结论总结如下。

(1)对数p-级数$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^p}$与对数$p$-积分$\int_c^{+\infty} \frac{(\ln x)^k}{x^p}\mathrm{d}x\,(c>1)$的敛散性:

$$\begin{cases} p\leqslant 0, & \text{发散} \\ p>0, & \begin{cases} k<0, & \begin{cases} 0<p<1, & \text{发散} \\ p=1, & \begin{cases} -k\leqslant 1 & \text{发散} \\ -k>1 & \text{收敛} \end{cases} \\ p>1, & \text{收敛} \end{cases} \\ k\geqslant 0, & \begin{cases} p\leqslant 1, & \text{发散} \\ p>1, & \text{收敛} \end{cases} \end{cases} \end{cases}。$$

(2)对数p-积分$\int_a^b \frac{[\ln(x-a)]^k}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$与$\int_a^b \frac{[\ln(b-x)]^k}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$的敛散性:

$$\begin{cases} p\leqslant 0, & \text{收敛} \\ p>0, & \begin{cases} k<0, & \begin{cases} 0<p<1, & \text{收敛} \\ p=1, & \begin{cases} -k\leqslant 1, & \text{发散} \\ -k>1, & \text{收敛} \end{cases} \\ p>1, & \text{发散} \end{cases} \\ k\geqslant 0, & \begin{cases} 0<p<1, & \text{收敛} \\ p\geqslant 1, & \text{发散} \end{cases} \end{cases} \end{cases}。$$

利用公式化的结论,对数p-级数与对数p-积分可视为熟知的级数和积分,用于判别其他级数和积分的敛散性,在数学分析课程中有很重要的应用。

例6　证明黎曼ζ-函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$$

在$(1,+\infty)$上有连续的各阶导数。

证明　$x\in(1,+\infty)$,即$x>1$,此级数为收敛的p-级数,和函数$\zeta(x)$有意义。

设$u_n(x)=\frac{1}{n^x}$,有$u_n'(x)=\frac{-\ln n}{n^x}$, $n=1,2,\cdots$。任取闭区间$[a,b]\subset(1,+\infty)$,对一切$x\in[a,b]$,有$\left|\frac{-\ln n}{n^x}\right|\leqslant\frac{\ln n}{n^a}$。由于对数$p$-级数$\sum\frac{\ln n}{n^a}$收敛,按照魏尔斯特拉斯判别法,函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}$在$[a,b]$上一致收敛,即在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛。则级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\ln n}{n^x}$的和函数在$(1,+\infty)$上连续且为$\zeta(x)$的导函数$\zeta'(x)$。这便证明了$\zeta(x)$有连续的导函数$\zeta'(x)$。

利用数学归纳法。假设对任何自然数$k>1$, $\zeta(x)$有连续的$k-1$阶导函数$\zeta^{k-1}(x)$。又$u_n(x)$的k阶导数为$u_n^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k(\ln n)^k}{n^x}$。

对一切$x\in[a,b]\subset(1,+\infty)$,$\left|\frac{(-1)^k(\ln n)^k}{n^x}\right|\leqslant\frac{(\ln n)^k}{n^a}$,且对数$p$-级数$\sum\frac{(\ln n)^k}{n^a}$收敛。按照魏尔斯特拉斯判别法,函数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k(\ln n)^k}{n^x}$在$(1,+\infty)$上内闭一致收敛,则其和函数连续且为$\zeta^{k-1}(x)$的导数,即$\zeta(x)$的$k$阶导数。从而$\zeta(x)$有连续的各阶导数。

例7　证明:含参变量的反常积分$\int_2^{+\infty}\frac{y}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$

在 $[0,1]$ 上关于 y 一致收敛。

证明 对一切 $y\in[0,1]$,有 $\left|\frac{y}{x(\ln x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{x(\ln x)^2}$。由对数 p-积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$ 收敛,及魏尔斯特拉斯判别法,反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{y}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x$ 在 $[0,1]$ 上关于 y 一致收敛。

例 8 证明:伽马函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

在其定义域 $(0,+\infty)$ 上有连续的各阶导数。

证明 由于

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x=I_1(s)+J_1(s)。$$

下面证明积分 $I_1(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 与积分 $J_1(s)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上对 s 内闭一致收敛。任取 $[a,b]\subset(0,+\infty)$。

(i) $I_1(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$:由于 $x\in[0,1]$ 时,对一切 $s\in[a,b]$,有 $\left|\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\right|\leqslant\frac{-\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-a}}$。

取收敛的对数 p-积分 $\int_0^1\frac{-\ln x}{x^{1-a}}\mathrm{d}x$ 作比较,由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{-\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-a}}}{\frac{-\ln x}{x^{1-a}}}=1$,知积分 $\int_0^1\frac{-\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-a}}\mathrm{d}x$ 收敛,从而由魏尔斯特拉斯判别法,积分 $I_1(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 关于s 一致收敛。

(ii) $J_1(s)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$:由于 $x\in[1,+\infty)$ 时,对一切 $s\in[a,b]$,有 $\left|\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-b}}$。

取收敛的对数 p-积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$ 作比较,由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-b}}}{\frac{\ln x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{b+1}}{\mathrm{e}^x}=0$,积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-b}}\mathrm{d}x$ 收敛,从而由魏尔斯特拉斯判别法,积分 $J_1(s)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 关于s 一致收敛。

因此,按照含参变量积分的连续性和可微性,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$ 在 $s\in(0,+\infty)$ 连续,且为 $\Gamma(s)$ 的导数 $\Gamma'(s)$。

利用数学归纳法。对任何自然数 $k>1$,假设 $\Gamma(s)$ 有连续的 $k-1$ 阶导数 $\Gamma^{(k-1)}(s)$。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k}{\partial s^k}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x=I_k(s)+J_k(s)。$$

i) $I_k(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$:由于 $x\in[0,1]$ 时,对一切 $s\in[a,b]$,有 $\left|\frac{\mathrm{e}^{-x}\ln x}{x^{1-s}}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-a}}$。不妨设分子非负。取收敛的对数 p-积分 $\int_0^1\frac{(\ln x)^k}{x^{1-a}}\mathrm{d}x$ 作比较,由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-a}}}{\frac{(\ln x)^k}{x^{1-a}}}=1$,积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-a}}\mathrm{d}x$ 收敛,从而由魏尔斯特拉斯判别法知积分 $I_k(s)=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 关于s 一致收敛。

ii) $J_k(s)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$:由于 $x\in[1,+\infty)$ 时,对一切 $s\in[a,b]$,有 $\left|\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\right|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-b}}$。

取收敛的对数 p-积分 $\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^k}{x^2}\mathrm{d}x$ 作比较,由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-b}}}{\frac{(\ln x)^k}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{b+1}}{\mathrm{e}^x}=0$,积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-b}}\mathrm{d}x$ 收敛,从而再由维尔斯特拉斯判别法,积分 $J_k(s)=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^k}{x^{1-s}}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 关于 s 一致收敛。

根据参变量积分的连续性和可微性,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial^k}{\partial s^k}(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x$ 在 $s\in(0,+\infty)$ 连续,且为 $\Gamma^{(k-1)}(s)$ 的导数,即 $\Gamma(s)$ 的 k 阶导数 $\Gamma^{(k)}(s)$。

综上所述,伽马函数 $\Gamma(s)$ 在其定义域内有连续的各阶导数。

4　结束语

本文详细推导了对数p-级数与对数p-积分的敛散性，得到了公式化的结论，弥补了数学分析课程中对这类级数和积分讲解的不足。本文的结论不仅为学生学习数学分析的相关知识提供了方便，而且便于教师在相关数学课程的教学中使用。

参 考 文 献

[1] 华东师范大学数学系.数学分析(上册)[M].4版.北京：高等教育出版社，2010.

[2] 华东师范大学数学系.数学分析(下册)[M].4版.北京：高等教育出版社，2010.

[3] 卓里奇B A.数学分析(第一卷)[M].李植，译.4版.北京：高等教育出版社，2006.

[4] 卓里奇B A.数学分析(第二卷)[M].李植，译.4版.北京：高等教育出版社，2006.

[5] 李录书.正函数广义积分敛散性的两个判别法[J].大学数学，1994(2)：3.

[6] 蒋良军，许永乎.正函数广义积分收敛性的一个判别法[J].高等数学研究，2009，12(1)：80-83.

[7] 姚云飞.关于级数敛散性的积分判别法的一个新证明及其推广[J].大学数学，2003，19(2)：5.

[8] 黄弋钊.关于函数项级数的一致收敛性再探[J].数学学习与研究，2016(15)：1.

[9] 刘江蓉.关于函数项级数的一致收敛性[J].科教文汇(下旬刊)，2013(18)：52-52.

[10] 郭小春.含参变量的广义积分非一致收敛的一个判定定理[J].宜春学院学报，2008(增刊1)：2.

[11] 李海燕.关于函数项级数一致收敛性的研究[J].宿州教育学院学报，2017，20(5)：3.

[12] 马利文.实分析基础[M].北京：北京邮电大学出版社，2019.

[13] 周民强.实变函数论[M].2版.北京：北京大学出版社，2012.

[14] 那汤松И П.实变函数论[M].5版.徐瑞云，译.北京：高等教育出版社，2010.

[15] 柯尔莫戈洛夫A H，佛明C B.函数论与泛函分析初步[M].7版.段虞荣，郑淇深，郭思旭，译.北京：高等教育出版社，2006.

[16] 裴礼文.数学分析中的典型问题与方法[M].北京：高等教育出版社，1993.

[17] 吴良森，毛羽辉，宋国栋，等.数学分析习题精解(单变量部分)[M].北京：科学出版社，2002.

[18] 吴良森，毛羽辉，宋国栋，等.数学分析习题精解(多变量部分)[M].北京：科学出版社，2003.

[19] 谢惠民，恽自求，易法槐，等.数学分析习题课讲义(上册)[M].北京：高等教育出版社，2004.

[20] 谢惠民，恽自求，易法槐，等.数学分析习题课讲义(下册)[M].北京：高等教育出版社，2004.

(责任编辑：马田田)

(上接第59页)

water use efficiency for Ameriflux sites[J]. Journal of Geophysical Research: Biogeosciences, 2015, 120(5): 887-902.

[39] SCOTT R L, EDWARDS E A, SHUTTLEWORTH W J, et al. Interannual and seasonal variation in fluxes of water and carbon dioxide from a riparian woodland ecosystem [J]. Agricultural and Forest Meteorology, 2004, 122(1): 65-84.

[40] DRAGONI D, SCHMID H P, GRIMMOND C S B, et al. Uncertainty of annual net ecosystem productivity estimated using eddy covariance flux measurements[J]. Journal of Geophysical Research Atmospheres, 2007, 112(D17).

[41] POST H H, FRANSSEN J H, GRAF A, et al. Uncertainty analysis of eddy covariance CO_2 flux measurements for different EC tower distances using an extended two-tower approach [J]. Journal of Geophysical Research: Biogeosciences, 2015, 11(8): 11943-11983.

[42] LASSLOP G, REICHSTEIN M, PAPALE D, et al. Separation of net ecosystem exchange into assimilation and respiration using a light response curve approach: critical issues and global evaluation[J]. Global Change Biology, 2010, 16(1): 187-208.

[43] AUBINET M, HEINESCH B, LONGDOZ B. Estimation of the carbon sequestrationby a heterogeneous forest: night flux corrections, heterogeneity of the site andinter-annual variability[J]. Global Change Biology, 2002, 8: 1053-1071.

[44] WU J, GUAN D, ZHANG M, et al. Comparison of eddy covariance and BREB methods in determining forest evapotranspiration: case studyon broadleaved Korean pine forest in Changbai mountain[J]. Chinese Journal of Applied Ecology, 2005, 24: 1245-1249.

(责任编辑：李拓宇)