DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.03.003

数学史与数学教育研究现状及展望

覃 淋 姚 芳*
(首都师范大学数学科学学院,北京 100048)

摘 要

HPM主要研究数学史与数学教育之间的关系,是数学教育研究的重要组成部分. 本文主要通过对HPM研究的相关文献进行分析,指出未来HPM研究有两个需要关注的方向 'HPM研究'的方法论研究,HPM与PME结合的研究.

关键词: HPM,研究现状,展望.
中图分类号: G633.6

0 引 言

国际HPM组织自上世纪70年代成立以来,经过四十多年的发展,在理论与实践研究方面都取得了较大的发展. 现在HPM研究已由早期的经验总结、理论探讨逐渐转向理论研究和经验总结的同时进行数学史融入课堂教学的实践研究. 在国内,上世纪90年代末开始有学者关注数学史在数学教育中的重要作用[1]. 总体而言,数学史的研究主要还是"为历史而历史"和"为数学而历史", "为教育而历史"的研究较少. 在实际数学教学中, "依历史而教育"事实上是一个比较困难的研究课题.

自2005年在西安召开了第一届全国HPM会议以来,中国的HPM研究已走过了十多个年头,取得了较大的发展. HPM研究的难点是这个领域的互通问题,数学教育研究者及广大数学教师缺乏数学史方面系统而专业的背景,而数学史专家在数学课程方面缺乏较为深入的了解. 但近年来这种局面有所改观. 实际上,关于HPM的研究最初是在数学史研究者中展开的,现在数学教育研究者及一线教师也加入到这个领域中来,推动了HPM研究的进一步发展. 2017年5月在大连召开了第七届数学史与数学教育学术研讨会,在此次研讨会上,进行了"数学文化进课堂优质课观摩会",如此以来,HPM的研究在实质性的课堂实施层面有了较大的发展. 因此,本文就近年来HPM在中国的发展状况进行尝试性概述.

1972年,在英国埃克塞特(Exeter)召开的第二届国际数学教育大会(ICME-2)上,由数学史家P S Jones和数学教育家Leo Rogers倡议,组织了一个"数学史与数学教学小组"(a work group on 'history and pedagogy of mathematics'). 1976年,在德国召开的ICME-3上,P S Jones和R Stowasser以"用数学史作为课程设计的关键性工具"(history of mathematics as a critical tool for curriculum design)为题,召开了多次会议. 在这次大会上, '数学史与数学教学小组"与国际数学教育心理学组织(the international group for the psychology of mathematics education,简称PME)一起成为国际数学教育委员会(ICMI)下辖的两个附属研究小组. 此时,该小组的名称非常冗长,叫作"与ICMI合作的数学史与数学教学国际研究小组"(international study group on relations between history and pedagogy of mathematics, cooperating with the international commission on mathematical instruction,简称ISGHPM).

在ISGHPM成立之初,主要关注师范院校中数学史课程的开设,促进对数学史与数学教学关系的认识,教育取向数学史资源的开发,数学史的文化作用等方面[2].

1980年,在美国举办的ICME-4会议上,选出了ISGHPM的两位新主席B Meserve和R Stowasser. 同

收稿日期: 2017-08-06
* 通信作者

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

年,英国数学教育家 Leo Rogers 创办了 HPM 通讯,并担任主编,在北美也出版了类似的 HPM 通讯,只不过二者都是地方性的 HPM 通讯. 直到 1984 年举办的 ICME-5 会议上,两种 HPM 通讯整合为 HPM 通讯,从此 HPM 通讯成为一个国际性的刊物. 同年,ISGHPM 以 ICME-5 卫星会议的形式举办,此后,这一传统延续至今. 同时,在 B Meserve 的建议下,ISGHPM 的名称也改为了今天所熟知的 HPM (international study group on the relations between history and pedagogy of mathematics),现通常把这一研究领域本身称为 HPM.

经过四十多年的发展,HPM 已经进入越来越多的学者的视线中,成为国际数学教育界关注的重要课题之一. 随着 HPM 研究的持续深入,其研究范围越来越广,超越了对数学史的教育价值的探讨. 纵观 HPM 的研究,我们发现,目前 HPM 领域的研究工作包括以下几个主要方面:(1) 关于"为何"及"如何"的讨论. (2) 历史相似性的实证研究. (3) 教育取向的数学史研究. (4) HPM 视角下的数学教学设计及数学教材. (5) HPM 与数学教师专业发展. 下面就这五个方面分别进行阐述.

1 关于"为何"以及"如何"的讨论

"为什么在数学教学中运用数学史?"讨论的是数学史的教育价值,也是 HPM 研究讨论最早最多的一个问题. 事实上,关于这一点,早在 HPM 成立以前就受到关注. 法国数学家泰尔凯(O Terquem,1782—1862)在其主办的《新数学年刊》的附录《数学历史、传记与文献通报》(1855)中先后刊登了一系列数学家的传记,对与中小学数学教学内容相关的数学史专题非常关注.

此外,数学家德·摩根(A De Morgan,1806—1871)、邹腾(H G Zeathen,1839—1920)等都强调数学史在数学教学中的重要作用. HPM 的先驱者卡约里(F Cajori,1859—1930)和史密斯(D E Smith,1860—1944)也在其著作中大力强调数学史的教育价值. 如卡约里在其著作《数学史》(1926)的前言中指出"如果用历史轶事点缀枯燥的计算和证明,学生的兴趣就会大大增加. ……通过对数学历史的介绍,能够让学生明白:数学并不是一门呆板乏味的学科,而是一门不断进步且生动有趣的学科."[3]

在 HPM 成立后,学者们对数学史的教育价值进行了更深入的讨论. 从研究情况来看,大致可分为列举式和分类式两种.

萧文强认为数学史具有使数学易于亲近,增进学生理解以及渗透多元文化观点等教育价值[4]. 弗维尔(J Fauvel,1947—2001)列举了激发学习动机,展现数学人文的一面,改变学生的数学观,提供跨学科合作等 15 条运用数学史于数学教学的理由[5]. 这些价值包含了学生的、教师的、课堂的、文化的、社会的层面,但缺乏一定的系统性.

在此基础上,一些学者运用分类的方式讨论了数学史的教育价值. 如有学者从数学学习、数学本质、教师教学背景和知识储备、数学情感及对数学作为文化活动的鉴赏等方面总结了数学史在数学教育中的重要作用[6]. I Gulikers 等建立了一个三维度的分类框架,每个维度上都从教师和学生两个方面论述了数学史的教育价值[7]. U T Jankvist 从"工具"和"目标"两方面讨论了数学史的教育价值[8].

总之,对数学史的教育价值的讨论所涉及的范围是非常广的. 除数学本身外,还有人文、文化、情感、认知等方面的因素. 关于数学史教育价值的讨论是非常重要的,它直接影响教师是否在数学教学中运用数学史,也在一定程度上影响着怎样将数学史融入数学教学.

虽然数学史的教育价值已得到数学教育工作者的广泛认可,对于是否在数学教学中运用数学史也持肯定态度,但对于"如何将数学史融入数学教学",却仍无定论,不同学者有不同的观点.

弗维尔总结了在数学教学中运用数学史的 12 种方法[5],C Tzanakis 等总结了在数学教学中运用数学史的三种方式[6]:(1) 提供直接的历史信息;(2) 借鉴历史进行教学;(3) 通过数学及其文化背景发展学生的数学意识. U T Jankvist 则提出了另外的 3 种方法[8]:(1) 讲述法,即在教学过程中补充相关的历史信息;(2) 模块法,即设计一些与教学内容相关的数学史专题;(3) 历史启发法,这是一种间接运用历史的方法,如发生教学法.

此外,还有学者提出了数学史融入数学教学的一些教学模式,具有较强的实践性. 如 L Radford 提出的"历史-心理认知发展模式"[6].

国内有学者做过此方面的研究,如洪万生提出的"资源联络教学模式"[9],该模式细分了 3 类材料:原始文献、二手材料和教学材料. 其中第一、二项材料是数学史研究范围内的工作,而教学材料则是在原始文献和二手材料启发下形成的,这三类材料

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

都是为教学服务的. 苏意雯提出了“逻辑、历史、学生认知”三面向的教学模式[10],学习工作单是该教学模式的一个具体体现. 汪晓勤在已有研究的基础上,提出了附加式、复制式、顺应式和重构式 4 类运用数学史于数学教学的方法[11].

虽然学者们提出了各种融历史于数学教学的方式,但在教学实践中并不容易操作. 实际教学中,教师需要根据数学教学内容来采取不同的方式融入数学史料. 这里我们将教师对数学史的认识分为三个层次: (1) 没有融数学史于数学教学的意识,称为意识层面的“无米之炊”. (2) 有融数学史于数学教学的意识,但没有可供使用的数学史料,称为材料层面的“无米之炊”. (3) 有融数学史于教学的意识和可供教学使用的史料,但不知如何将史料融入教学,或是低水平的融入史料,称为方法层面的“无米之炊”. 其中(1)(2)是在数学教学中运用数学史料的前提,(3)是数学史融入数学教学的难点. 数学史融入数学教学的最高境界是“无痕融入”,在不增加学生学习负担的前提下帮助学生解决数学学习中遇到的困难. 即通过人类发现或创造数学的过程,来寻求学生数学学习过程中可能遭遇的困难的解决途径,真正做到学生学习的是数学,而不是数学史.

2　历史相似性的实证研究

所谓历史相似性,也叫历史发生原理,是指个体的认知发展遵循人类的认知发展. 追溯此观点的历史,可上溯到 19 世纪.

法国哲学家孔德(A Comte,1798—1857)认为,个体教育必然在其次第连续的重大阶段仿效群体的教育,在感情上如此,思想上亦是如此[12]. 斯宾塞(H Spenser,1820—1903)进一步明确指出[13]: “儿童所受的教育在方式和安排上都必须同历史上人类的教育一致,即个体知识的起源遵循种族知识的起源.”后来这一观点得到了数学家和数学教育家的认同,他们认为个体在数学学习上也遵循历史发生原理.

不过,早期学者似乎认为,个体知识发生发展的过程与人类知识发生发展的过程具有严格相似性. 随着研究的深入,人们已逐渐摆脱了“严格相似性”的狭隘观点. 此后,一些学者对此进行了更为详细的论述. 如庞加莱(1899)认为[14]: “教育工作者的任务是让孩子的思维经历其祖先的经历,迅速通过某些阶段而不跳过任何阶段.”史密斯(1900)认为,“困扰世界的东西也会以相似的方式困扰儿童,儿童在其发展过程中会以类似的方式来克服类似的困难.”[15] F·克莱因(1932)指出[16]: “个体的成长要经历种族成长的所有阶段,顺序相同,只是所经历的时间缩短. 而教授数学和其他任何事情一样,至少在一般意义上要遵循这项定律,教学应慢慢将其引向更高级的事物,遵循人类从知识的原始状态到更高级形式的道路.”

波利亚(1965)指出, ‘教一门学科(或概念)时,应当让孩子重复人类思维发展那些关键性步骤. ……在了解人类是怎样获得某些事实或概念的知识之后,才能更好地判断孩子应该怎样去学习这些知识.”[17] 弗赖登塔尔(H Freudenthal,1905—1990)强调“年轻人的学习应该重蹈人类的学习过程,尽管方式变了.”[18]

从以上名家的论述,可以得出最明显的结论: 数学教学应该关注数学发生发展的顺序,历史是教学的指南. 历史相似性的实证研究很重要,只要对某一数学内容的历史相似性得到验证,就可以通过数学发展过程中遇到的问题来预测学生在学习过程中可能遇到的认知困难,根据学生的问题所在,进行针对性的教学,帮助学生克服障碍.

国外较早做这方面工作的是 P Harper(1987),他利用丢番图著作《算术》中的问题,对两所学校 1 ~ 6 年级 144 名学生进行测试,发现学生对符号代数的理解与符号代数的发展过程具有历史相似性[19]. L E Moreno 等调查了 36 名尚未接触实无穷概念的数学系大一学生,发现他们在面临包含无穷小概念的问题时,其反应和历史上数学家的反应是相似的[20]. A Bakker 的研究则表明学生对平均值的理解与历史上人们对平均数的理解具有相似性[21]. Y Thomaidis 等就负数大小关系问题对初中生进行了测试,发现学生的理解和所犯错误与历史上数学家的理解和所犯错误,在某种程度上相似[22].

国内学者在这一方面也做过一些研究. 如汪晓勤等借鉴西方学者的研究方法,考察高一学生在“虚数相乘问题”和“无穷级数求和问题”的认知上是否与历史上数学家们的理解具有相似性. 结果表明: 高一学生对这两个问题的认识在很大程度上重蹈了历史发展过程[23]. 此外,还有一些学位论文涉及此方面的研究[24-25].

从实证研究的具体内容来看,涉及范围很广,包

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

括代数、函数、三角、数列、级数、古典概率、平均值等. 相关统计表明,HPM 领域的实证研究论文仅有 100 多篇[26].

3 教育取向的数学史研究

最初,数学史的研究目的是“为历史而历史”和“为数学而历史”,随着数学史研究的深入以及国际 HPM 组织的建立与发展,“为教育而历史”也成为数学史研究的主要目的之一. “为教育而历史”是 HPM 研究的基础性工作. 只有了解一个数学术语、数学概念、公式、定理和符号的发生发展过程,才能讨论概念理解的历史相似性和借鉴历史进行教学.

早在 19 世纪,就有学者开始关注与数学教学内容相关的数学史专题[27]. 泰尔凯曾关注以下问题:圆锥曲线的历史、对数的历史、概率论的历史等. 卡约里早年也曾研究过许多这类问题:为什么用 x 表示未知数?为什么等差数列又叫算术级数?“数学归纳法”的名称是如何产生的?这些问题具有明显的教育取向. 教育取向的数学史研究主要是对教材中相关数学概念、符号、术语等的起源和演进历程进行研究,不是为历史而历史,是为教育而历史. 美国的 *Mathematics Teacher* 杂志就刊登有不少这方面的文献[28].

国内学者在这一方面做过不少研究,如汪晓勤等的《中学数学中的数学史》(2002)就是较早的文献之一[29]. 文献[30]考察了历史上最早构造的弦表,并详细分析了它的构造原理. 此外,还有许多研究涉及圆周率 π、数列、圆锥曲线等的历史[31-33].

从研究内容可看出,HPM 为数学史的研究提供了比较丰富的问题. 在实际课堂教学中,教师常会遇到学生提出的各种各样的为什么?但并不是所有的为什么都可以通过逻辑的手段来解决,如以下一些问题:

虚数是虚无飘渺的数吗?

无理数是毫无道理的数吗?

为什么称未知数为“元”?

“象限”、“卦限”是如何来的?

再如,为什么一天有 24 小时?一周有 7 天?为什么直角是 90°,平角是 180°?[34] 诸如此类的问题,逻辑手段无法解决,只有借助历史的手段,才能给出一个比较完美的解释.

4 HPM 视角下的数学教学设计及数学教材

将数学史知识与具体教学内容相结合,一直是 HPM 研究的主要目的之一,迄今为止,已积累了较多的案例. 1995 年,美国数学协会在国家科学基金的资助下成立了数学史及其教学应用研究所,专门致力于开发运用数学史于课堂的教学设计. V J Katz 主编的 *Using History to Teach Mathematics*: *An International Perspective*(2000)中也涉及了一些教学案例,书中还提出了 HPM 视角下教学设计的具体步骤[35]:(1)了解所讲授主题的历史发展过程. (2)确定该主题历史发展过程中的主要步骤. (3)选择合适的话题对历史材料进行改编、重构,使其适合课堂教学. (4)设计一系列联系紧密的问题.

如 P Ransom 选取历史上的勾股定理应用问题用于教学[36],M Kool 选择了 16 世纪荷兰教科书中的年龄问题、行程问题进行教学,并将原教科书中的解法称作“班级中额外的一名学生”.[37]

在台湾,基于 HPM 的教学设计主要采取学习工作单的形式. 大陆也有不少基于数学史的教学案例设计,如文献[38]以椭圆为例,设计了一个基于 HPM 视角的教学设计. 文中首先通过对椭圆发展历史的研究,将椭圆的历史分为椭圆的发现、截线定义形成、焦半径性质的获得、机械作图的产生等 7 个环节. 然后教学设计从球的影子、水杯等实例出发,利用旦德林双球,推导出椭圆焦半径性质,实现了古希腊截线定义到课本轨迹定义的自然过渡[38].

在此基础上,进一步的研究则是将数学史融入数学教材,这也是 HPM 一直所关注的一个课题. 从目前的研究来看,主要集中在以下几方面:一是对教材中的数学史料进行分类和统计[39],二是就数学史料融入数学教材的方式、原则等进行讨论[40],三是从 HPM 的视角对不同教材就具体内容进行比较[41].

虽然许多数学教育工作者已认识到应该在数学教材中融入数学史,教材中的数学史应该是衡量教材质量的标准之一. 但对于数学史如何融入数学教材、史料的选择标准等问题,并没有一个较为清晰的认识.

5 HPM 与数学教师的专业发展

在 HPM 成立之初,主要讨论数学史的教育价

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

值,并未与教师专业发展联系在一起. 随着 HPM 研究的持续深入,HPM 与教师专业发展这一主题引起了研究者的广泛关注.

实际上,早在上世纪 20 年代,已有学者认识到数学史在职前教师教育中的重要性[42]. 1998 年,在法国举办的"数学史在数学教育中的作用"的国际研讨会,主题之一便是数学史对数学教师培训的价值. 2012 年在韩国召开的 ICME-12 的 HPM 卫星会议上,其中两场专题讨论的主题之一,便是"为什么职前教师需要数学史?"[26] 在 HPM2012 会议上,U T Jankvist 等指出,MKT(mathematical knowledge for teaching) 应成为 HPM 研究的一个重要方向,并认为数学史可以促进教师的专业发展[43].

相关研究也表明 HPM 对教师的专业发展有促进作用. 苏意雯通过个案研究了教师实施 HPM 教学后的改变,研究发现: 教师的反思和批评能力增强了,对数学的认识更为宏观,由教师为中心转向了以学生为主体的教学[10]. 汪晓勤通过个案研究[11],发现初中教师在 HPM 介入教学后,发生了以下变化: 教师逐渐形成了自己的教学风格,对教材的批判能力有了提升,对教材的拓展意识有了增强,对学生的认知规律有了更深刻的理解.

总之,目前相关研究已表明,HPM 对数学教师而言,至少有以下帮助: (1) 促进教师对数学的理解,改变教师的数学观; (2) 帮助教师理解学生,预测学生的认知障碍; (3) 渗透数学的文化价值; (4) 促进教师教学观念的转变.

6　结　语

综上所述,在 HPM 研究领域,关于"为何"和"如何"的讨论比较多,但"如何"的讨论是见仁见智,迄今并无定论. 历史相似性实证研究的案例较少,其研究方法有待改善,研究工具也待开发. 教育取向的数学史研究尽管文献较多,但仍需 HPM 研究者及中小学数学教师进一步合作. 虽然一线教师认可数学史的教育价值,但许多因素都制约着教师在课堂上运用数学史,如课时、考试、可用于教学的史料的缺乏以及教师本身等. HPM 与教师的专业发展是 HPM 近年来研究的重要方向之一,目前国内很多师范院校都开设了数学史课程,但与数学实际课堂的融入研究需要进一步开发. 不少学者认为为职前教师开设的数学史课程,不能只停留在讲讲故事、看看图片的表面层次上. 但对于具体如何操作,师范院校的数学史课程应该包含哪些内容? 应该以怎样的形式开设? 如何通过数学史知识提高数学教师的教学技能? 数学史可以促进职前教师哪些方面的发展? 这些问题并没有清晰的认识.

从上述分析可以看出,目前 HPM 研究领域的一些不足之处. (1) 研究工具缺乏,研究方法不够完善. (2) 理论研究与教学实践存在鸿沟. HPM 和 PME 在 ICME-3 大会上同时成为 ICMI 下辖的附属组织. 但 PME 的研究工具和方法都已有较大的发展,在目前国际数学教育界占据比较重要的地位. 相比而言,HPM 研究则缺乏比较科学、系统的研究工具,在研究规范方面也有待提高. 虽然一些教育上的实验表明,在教学中融入数学史料能够在一定程度上提升学生学习的积极性,激发学习动机,丰富学习体验,加深对数学的理解,但对学习成绩影响并不明显[44]. 这在一定程度上影响着教师对数学史的态度,导致 HPM 研究成果在课堂实践中遭遇"高评价,低应用". HPM2012 大会的主要议题之一便是"融历史于数学教育的理论框架",会议上,T H Kjeldsen 所作大会报告"为数学和数学学习运用数学史: 融数学史于数学教育的一个理论框架",就是这方面的一个讨论[45]. 在 HPM2016 上,该议题仍是大会的主要内容之一.

因此,在未来 HPM 研究中,关于 'HPM 研究' 的方法论研究应该是后续 HPM 研究的重要方向之一. 只有建立合理的理论框架、科学系统的研究工具、规范的研究方法,HPM 的研究成果才能被更多的学者接受,才能更具生命力.

HPM 研究中另一个值得关注的方向是 HPM 与 PME 相结合的研究. 从直觉上而言,数学史可以通过影响人的非智力因素(如情感、态度、信念等) 来影响学生的数学学习,对学生的数学认知和思考有积极影响.

HPM 和 PME 是数学教育研究的两个重要领域,但二者也有一些不同之处. PME 的关注点在 '人',强调学习认知,讨论如何让人更容易的学习数学. HPM 的关注点在 '数学' 本身,强调数学的人文性和文化价值,讨论如何让数学更接近人[44]. 从二者的发展情况来看,虽然 HPM 比 PME 更早成立,但 PME 已成为数学教育研究的一个基础性领域,PME 每年轮流在世界各地区举行年会,有自己的一套规范的研究方法. HPM 则还处于一个经验积累的阶段,没有一套规范的研究方法,在许多方面还未达

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

成共识. 因此,在 HPM 与 PME 相结合的研究中,除了研究数学史对学生数学学习的心理过程的影响,数学学习的心理过程与数学思维发展的历史进程之间的关系以及历史上数学家们解决问题的心理和思维过程外,还应借鉴 PME 的研究方法,开发出适合 HPM 研究的工具.

参 考 文 献

[1] 徐利治,王前. 数学哲学、数学史与数学教育的结合: 数学教育改革的一个重要方向 [J]. 数学教育学报,1994,3(1):3 - 8.

[2] 欧士福. HPM 发展史: 1976—2000 年 [J]. HPM 通讯,2002,6(10):2 - 4.

[3] Cajori F. A history of mathematics [M]. New York: The Macmillan Company,1926: 2 - 3.

[4] 萧文强. 数学史和数学教育: 个人的经验和看法 [J]. 数学传播,1992,16(3):23 - 29.

[5] Fauvel J. Using history in mathematics education [J]. For the Learning of Mathematics,1991,11(2):3 - 6.

[6] Fauvel J, Van maanen J. History in mathematics education: the ICMI study [M]. Dordrecht: Kluwer Academic publishers,2000.

[7] Gulikers I, Blom K. "A historical angle": a survey of recent literature on the use and value of history in geometrical education [J]. Educational Studies in Mathematics,2001,(47):223 - 258.

[8] Jankvist U T. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education [J]. Educational Studies in Mathematics,2009,(71):235 - 261.

[9] 洪万生. 数学史与数学的教与学 [J]. HPM 通讯,1999,2(4):1 - 3.

[10] 苏意雯. 数学教师职业发展的一个面向: 数学史融入数学教学之实践与研究 [J]. HPM 通讯,2005,8(15):1 - 2.

[11] 汪晓勤. HPM 与初中数学教师的专业发展: 一个上海的案例 [J]. 数学教育学报,2013,22(1):22 - 26.

[12] 孔德. 论实证精神 [M]. 北京: 商务印书馆,2009: 106.

[13] 斯宾塞. 斯宾塞教育论著选 [M]. 北京: 人民教育出版社,2005: 61 - 62.

[14] Kline M. Logic versus pedagogy [J]. American Mathematical Monthly,1970,77(3):264 - 282.

[15] Smith D E. Teaching of Elementary Mathematics [M]. New York: The Macmillan Company,1900: 42 - 43.

[16] Klein F. Elementary mathematics from an Advanced Standpoint [M]. London: Macmillan & Co,1932: 146.

[17] Pólya G. 数学的发现 [M]. 北京: 科学出版社,2006: 316.

[18] Ernest P. The history of mathematics in the classroom [J]. Mathematics in School,1988,27(4):25 - 31.

[19] Harper P. Ghost of Diophantus [J]. Educational Studies in Mathematics,1987,(18):75 - 90.

[20] Moreno L E, Waldegg G. The conceptual evolution of actual mathematics infinity [J]. Educational Studies in Mathematics,1991,(22):211 - 231.

[21] Bakker A, Graemjer K P. An historical phenomenology of mean and median [J]. Educational Studies in Mathematics,2006,(62):149 - 168.

[22] Thomaidis Y, Tzanakis C. Historical evolution and students' conception of the order relation on the number line: the notion of historical parallelism revisited [J]. Educational Studies in Mathematics,2007,(66):165 - 183.

[23] 汪晓勤,方匡雕,王朝和. 从一次测试看关于学生认知的历史发生原理 [J]. 数学教育学报,2005,14(3):30 - 33.

[24] 沈金兴. 中学生对古典概率的理解: 历史相似性研究 [D]. 上海: 华东师范大学,2007.

[25] 殷克明. 高中生对切线的理解: 历史相似性研究 [D]. 上海: 华东师范大学,2011.

[26] 蒲淑萍. 寻找历史与教学的最佳融合: 国际 HPM 2012 会议及其研究分析 [J]. 数学教育学报,2013,22(3):89 - 92.

[27] 汪晓勤,欧阳跃. HPM 的历史渊源 [J]. 数学教育学报,2003,12(3):24 - 27.

[28] 田方琳,汪晓勤. 美国《数学教师》上的 HPM 内容分析 [J]. 数学教育学报,2016,25(4):42 - 46.

[29] 汪晓勤,韩祥临. 中学数学中的数学史 [M]. 北京: 科学出版社,2002.

[30] 姚芳,刘晓婷. 历史上最早构造的三角函数表: 弦表 [J]. 数学通报,2008,47(11):23 - 26.

[31] 姚芳,郑爱国. 从认识论的角度去理解数学教学内容的个案分析 [J]. 首都师范大学学报: 自然科学版,2001,22(2):25 - 31.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[32] 汪晓勤. 泥版上的数列问题[J]. 数学教学,2009(12):2-4,45.
[33] 汪晓勤. 椭圆方程之旅[J]. 数学通报,2013,52(4):52-56.
[34] Freudenthal H. Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics? [J]. For the Learning of Mathematics,1981,2(1):30-33.
[35] Katz V J. Using history to teach mathematics: an international perspective [M]. Washington DC: The Mathematical Association of America,2000:49-58.
[36] Ransom P. Whys and Hows [J]. For the Learning of Mathematics,1991,11(2):7-9.
[37] Kool M. An extra student in your classroom: how the history of mathematics can enrich interactive mathematical discussions at primary school [J]. Mathematics in School,2003,32(1): 19-22.
[38] 汪晓勤,王苗,邹佳晨. HPM 视角下的数学教学设计: 以椭圆为例[J]. 数学教育学报,2011,20(5):20-23.
[39] 覃淋. 台湾初中数学教材中的数学史[J]. 中学数学杂志,2017,(8):33-37.
[40] 蒲淑萍,汪晓勤. 数学史怎样融入数学教材: 以中、法初中数学教材为例[J]. 课程·教材·教法,2012,32(8):63-68.
[41] 徐章韬,梅全雄. HPM 视角下的数学教材编写[J]. 数学教育学报,2009,18(3):14-17.
[42] Smith D E. History of Mathematics [M]. Boston: Ginn & Company,1923: iii.
[43] Jankvist U T,Mosvold R, Clark K. Mathematical Knowledge for Teaching in Relation to History in Mathematics Education [C]. Daejeon: 12th International Congress on Mathematical Education, 2012.
[44] 刘柏宏. HPM 2004 瑞典之旅[J]. HPM 通讯,2004,7(9):1-3.
[45] Kjeldsen T H. Uses of history for the learning of and about mathematics: towards a theoretical framework for integrating history of mathematics in mathematics education [C]. Daejeon: 12th International Congress on Mathematical Education, 2012.

Study Status and Development Prospects of HPM

Qin Lin　Yao Fang

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing　100048)

Abstract

HPM mainly studies the relationship between mathematics history and mathematics education, which is an important part of mathematics education research. This article mainly analyzes through the HPM research literature, points out that there are two directions worthy of attention for the future HPM research: 'HPM research' methodological research, HPM and PME combined research.

Key words: HPM, research status, research prospects.

通信作者　姚芳(1964-),女,新疆伊宁人,博士,首都师范大学数学科学学院副教授,主要从事数学史、数学史与数学教育研究. E-mail: yaof@cnu.edu.cn.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net