首都师范大学学报(自然科学版)
第 41 卷 第 2 期 Journal of Capital Normal University No. 2
2020 年 4 月 (Natural Science Edition) Apr. ,2020

弧度制教学中相关问题的问答

朱 一 心

(首都师范大学数学科学学院, 北京 100048)

摘要:在中学数学基础上,以问答形式,讲解弧度制教学中涉及的数与量、数的十进制与六十进制表示、角的大小与度量、弧度制与角度制、三角函数等概念,理清数与量的不同,讨论角的大小与度量的差别,辨析弧度制学习和教学过程中一些疑惑, 指出高中数学"2017 课程标准"案例 3 中的误解.

关键词:弧度制;角度制;十进制;角的大小

中图分类号:O122; O123 **DOI**:10. 19789/j. 1004-9398. 2020. 02. 010

1 弧度制教与学中的问题

中学数学教学中,"使用弧度制的好处"常常被提及,文献[1]对弧度制的好处作了介绍. 然而,仍有学生甚至数学教师,对于弧度制及相关问题的理解存在疑惑甚至误解. 主要集中在是否只有弧度制才能使得三角函数成为实数到实数的映射,角度的数值是否是一个无量纲的比值,角度的数值是否是六十进制数以及六十进制数是否是实数等问题上. 有些还涉及到对函数、数量、数的进制、角的大小与度量等概念的理解.

误解既发生在重要文件中,如文献[2]111 页中的案例 3"引进弧度制的必要性",也发生在研究论著[3]中和专业的中学数学教学讨论场合. 至于公众流传的"360 问答""百度知道""作业帮"等,误解更是比比皆是.

本文讨论弧度制教学中相关的问题,帮助教师和学生理清教学和学习中的疑惑和误解. 文中的设问,大多来自与师生的真实讨论. 文中所称中学数学是通常理解的含义,所称的教师和学生,分别指中学数学教师和中学生. 问答从"2017 课程标准"中的相关案例入手,对教学中的疑惑和误解逐一展开问答式辨析. 为方便讨论,把文献[2]108 和 111 页中的案例 3 和 2 的相关内容进行抄录,并用下划线标明后面讨论将涉及的概念或者问题.

1.1 引入弧度制的必要性(案例 3)

【目的】理解弧度制的本质是用线段长度度量角的大小,这样的度量统一了三角函数自变量和函数值的单位;进一步理解高中函数概念中为什么强调函数必须是实数集合与实数集合之间的对应,因为只有这样才能进行基本初等函数的运算(四则运算、复合、求反函数等),使函数具有更广泛的应用性.

【情境】对于三角函数的教学,为什么初中数学通过直角三角形讲述,而高中数学要通过单位圆讲述? 这是必要的吗?

【分析】……初中三角函数是对直角三角形中的边角关系的刻画,其中自变量的取值是60 进制的角度,不是10 进制的实数,不符合对应关系的函数定义. ……在高中阶段,借助单位圆建立角度与对应弧长的关系,用对应弧长刻画角的大小;因为长度单位与实数单位一致,这就使得三角函数的自变量与函数值的取值都是实数,符合对应关系的函数定义.

用角度作为自变量表示三角函数,还存在着一个突出的问题,就是自变量的值与函数值不能进行运算(例如,60°与 sin60°不能相加),阻碍了三角函数通过运算法则形成其他初等函数. 此外,微积分中重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 成立,也依赖自变量 x 为实数. 特别是,利用三角函数能够较好地描述钟摆、潮汐等周期现象,这时的自变量不一定是角度,可以是时间或其他的量. 通过这样的教学,可以让学生感悟数学抽象的层次性.

1.2 函数的概念(案例 2)

【分析】……例如,匀速直线运动中(速度为 v),路程 (s) 随着时间 (t) 的变化而变化,因此路程是时间的函数,记为 $s=vt$. 再如,在单价 (n)、数量 (p)、总价 (S) 的关系中, S 随着 p 的变化而变化,因此S 是数量的函数,记为 $S=pn$, 通常把这样的表述称为函数的"变量说".

但是,上述 2 个函数自变量的单位不同,不能

进行加、减等运算. 若舍去其具体背景进一步抽象,可以得到一般的正比例函数 $y = kx$(k 为非零常数). 于是,2 个正比例函数就可以进行运算了,所得结果还是一般的函数.

到了高中,……通常把这样的表述称为函数的“对应关系说”. 不同的函数可以进行加、减、乘和除法等运算,函数研究的内涵和应用的范围得以扩展.

2　函数的运算结果

2.1　什么是函数

中学数学中的函数是实数集合上的一元实函数的简称,是实数的子集合到实数的子集合的一个映射. 即 A 和 B 是实数集合的子集合,则映射 $f:A \to B$ 称作一个函数,也称 f 是 $A \to B$ 的函数. 更一般地,当集合 A 和 B 是复数集合的子集合时,$f:A \to B$ 是复函数. 当 A 不限于是数的集合,而 B 是数的集合时,$f:A \to B$ 是一般函数.

上述定义中,集合与映射被当作是已知的逻辑基本概念. 公理体系下的映射定义,是集合 A 与 B 的一个关系,是直积 $A \times B$ 的一个子集合,参考文献[4]的 97 页. 用关系来定义映射,能讲清楚映射中对应“法则”的确切含义,使函数意义更广泛,函数运算与复合的含义更清楚,多元函数定义更容易,此处不作深入讲解. 当说到函数 $f(x)$ 时,既指函数的对应法则,也可以指具体的函数值运算程序,见文献[5]的 283 页.

2.2　函数运算结果

函数的运算结果不是一个数,而是一个新的函数,其函数值由函数值的运算得到. 例如,函数加法:对于 2 个 $A \to B$ 的函数

$$f:\ \begin{array}{c} A \dashrightarrow B \\ x \mapsto f(x) \end{array},\qquad g:\ \begin{array}{c} A \dashrightarrow B \\ x \mapsto g(x) \end{array}$$

可以定义函数 $A \to B$ 的函数 $f+g$ 为

$$f+g:\ \begin{array}{c} A \dashrightarrow B \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{array},$$

即 $f+g$ 将 x 映射到 $f(x)+g(x)$,或者 $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$,简称“和函数的值等于函数值的和”. 对于函数 $f:A \to B$ 和 $g:C \to D$,当 A,B 与 C,D 不完全相同时,是不可以作加法运算的,但这种情况下,有时默认 $f+g$ 是 $A \cap C \to B \cap D$ 上的函数. 类似的,当 $B = C$ 时可以对于函数 $f:A \to B$ 与 $g:C \to D$,定义复合函数 $g \circ f:A \to D$,使得 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$,有时默认 $g \circ f$ 是 $C \cap f(A) \to D$ 的函数.

这样函数 $s(t) = vt$,$S(t) = t^2$ 的和是函数 $h(t) = vt + t^2$,它们的一种复合是函数 $k(t) = (vt)^2 = v^2t^2$.

3　数与量的区别

3.1　数与量

数,表示物体的量的基本数学概念,例如自然数、分数、实数和质数等. 量,关于物体多少的数学属性,也称数量. 数是量的抽象,可以用 1,2,$\sqrt{2}$,π,sin2 等数学符号表示,是脱离了物体的具体物理性质的概括. 量是数的具体存在和应用,与具体物体的形态相结合,描述某种具体性质,量是有单位的. 例如,1 个,2 m,$\sqrt{2}$ h,π 弧度, sin2 m/s,…,1(m/s) 描述的物理量是速度. 柯朗和罗宾[5]称“符号 $\frac{m}{n}$ 脱离了它同测量过程及被测量的量的具体关系,而被看作是一种纯粹的数”. 一般情况下,不严格区分数与量,甚至在数学的具体问题中,很少离开数单独讲量的含义,但数与量是不同的. 文[6,p. 10,p. 26]称“但是数之间的关系是物体集合之间的现实的量的关系的抽象形态”“从而实数是脱离了具体性质来加以考察的一般量的比”.

量有 2 种基本存在形式,计数和度量. 自然数对应的量既可以是计数又可以是度量,即可以用于“10 个”计数,又可以用“10 m”度量. 整数以外的正实数一般只用于度量不用于计数,即不能称“$\sqrt{2}$ 个”,但可以有“$\sqrt{2}$ m”.

可以这样理解数与量的关系,数是纯粹的数学世界中的对象,数只服从于数学运算、结构和原理;量是数对于现实世界的应用工具,对这个工具的有效性的判断与检验,需要回归到现实世界的客观存在中进行. 量是由度量得到的,是测量、度量的结果,度量基础是测量. 测量与度量的标准及方法可以有多种.

3.2　数的单位

回答是否定的. 在数系的扩张中,从没有建立“实数的单位”这样的概念;而当数用于度量,表示具体物体的量,是有度量单位的. 有时候没有严格区分数与量的差异,造成对概念的误解. 例如,后文将分析到,角的弧度制、角度制表示中,就没有严格区分弧度数与弧度,角度数与角度.

在数轴上用点和线段表示数时,为了数与线段之间建立对应,将固定间隔点之间线段作为一个度

量单位,称其为单位长度.这个单位长度是固定的,是这个数轴系统中的度量标准或者度量单位,即长度单位.这个长度单位,与“米、秒”的功能一样,只是没有写出“米、秒”一样的“单位符号”.对于这个做法,亚历山大洛夫[6]具体描述了一段线段 CD 如何去度量一段线段 AB,将 AB 对应到一个数.柯朗等[5],也类似地描述实数与线段的对应.也就是在这种意义下将实数看成线段,即由某一固定的线段的倍数对应的线段.实际上需要对线段进行运算,细致的陈述可以在文献[7]中看到.

可见,当把实数对应到数轴上的线段时,需要给定一线段作为度量单位,而不是实数本身有单位.如果将实数对应的度量的单位混称为“实数的单位”,那么,将实数用于长度的度量,实数“单位”似乎应该是米;将实数用于面积的度量,实数“单位”又应该是平方米?实际上众所周知平方米是面积单位,而不是实数本身的单位.

当将实数看成是一个运算系统或运算结构,那么,乘法运算的单位元是1,加法运算的单位元是0,运算单位元也称乘法单位和加法单位.这里,乘法单位1后面无法跟量词,即乘法单位1只有数的运算意义,不具有度量意义.

3.3 数的运算律和运算法则是否依赖于数对应的量的意义

数的运算不是量的运算,数的运算规律并不由具体物体的数量关系决定.$2\times3=6$ 的正确性,并不因为“2个苹果×3个苹果=6个平方苹果”没有物理意义而受到影响,根据数的运算定义,$2\times3=3+3=6$,$3\times2=2+2+2=6$ 是脱离了具体物体的物理属性而存在的.同样无需考虑4个苹果开2次方的物理意义,但可以执行 $\sqrt{4}=2$ 的运算,这样运算 $5t+t=6t$ 时没有任何疑惑.如果混淆数的运算与对应物体量的关系,那么以速度每小时5 km走 t h,总共走了 $5t$ km,$5t$ km与 t h相加没有任何物理意义.但若另一段路程以每小时1 km又走了 t h,那么 $5t$ km与 t km可以相加得总共走了 $6t$ km.就是说 $5t+t=6t$ 有时不可以成立,有时又可以成立,这将使数学陷入莫名的困境.文献[6]的26页称“各种不同的量,比如长度、质量、电流强度、能等等的值都可以由数来表示,而各个量之间的依存和联系关系,可以用它们的数值之间的依存关系来刻划”.数的运算性质是抽象于因而独立于物体量的含义的.

3.4 物理学中的数学公式、函数关系是否带量纲才成立

从两方面来回答.一是数学公式、函数关系的成立与量纲无关.二是这些公式、关系表达的物理意义与量纲有关.

数学是舍弃了具体物体的物理属性的抽象,在作数的运算时,运用的是抽象的一般规律,执行的是由数的大小与次序以及规定造成的运算律,而不是按照一个具体物理量属性进行的.物理量之间的函数以及函数运算和函数复合的物理意义,是物理学中的量纲问题,即使有量纲分析,也并不需要依赖于量纲才可以进行数据运算,只是在解释物理意义时需要量纲分析.

3.5 路程的数值与时间的数值是否可以作运算

函数模型中变量的运算是数的运算,并不需要带量的单位,路程的数值与时间的数值当然可以进行运算.路程是时间的函数,S 是 p 的函数,这是实数到实数的映射.把这2个函数看成是一类函数,都是一次函数,二者之间的运算与复合当然可以进行.

对于一元函数而言,自变量的数值与因变量的数值相加是可以进行的,虽然与如何将其应用到具体的量的意义无关.然而,对于多元函数来说,不应该要求自变量的数值与因变量的数值进行运算而且具有具体物理意义.对于一般函数而言,没有任何企图要将自变量与因变量的数进行相加,其数的运算结构都可能不是一样的.例如,一维数与二维数组怎么相加,为什么要求其相加呢?

4 十进制表示数

4.1 什么是十进制

十进制是数的十进制(位)表示、十进制(位)记数的简称,也称阿拉伯记数法[8].对于一个自然数,将其按照10的方幂分组求和,用0,1,2,…,9这10个字符表示10方幂的个数(最高位不能为0),按照方幂大小次序在对应的位置写出方幂个数的字符,用这组有序字符来表示这个数,称为十进制记数法.整数通过添加正负号,从而借助自然数的十进制得以表示.十进制记数法还可以拓展到小数的表示,

$$a_k a_{k-1}\cdots a_0 b_1 b_2\cdots = a_k\times10^k + a_{k-1}\times10^{k-1} + \cdots + a_0 + b_1\times\frac{1}{10} + b_2\times\frac{1}{10^2} + \cdots,$$

其整数部分是有限的,小数部分可以有无限项(最后1位小数不能为0).

4.2　什么是位值制记数法

十进制就是一种位值制记数法. 任意给定 2 个正整数 a 和 n, 可以由如下方法将 a 表示成 n 进制记数:由阿基米德公理,存在非负整数 k, 使得 $n^k \leqslant a < n^{k+1}$. 于是存在正整数 a_k 和非负整数 b 使得 $a = a_k \times n^k + b, 1 \leqslant a_k < n, 0 \leqslant b < n^k$. 再对 b 用阿基米德公理,继续这样下去,由归纳法,存在 $0 \leqslant a_i < n, i = k-1, k-2, \cdots, 1, 0$ 使得 $a = a_k \times n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 \times n + a_0$, 简记为 $a = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}_n$, 称该表达式为 a 的 n 进制表示. 这个表达式中,不同位置的数值 a_i 有不同的含义 ($a_k \neq 0$), 这种记数法称位值制记数法. 此记数法可以拓展到小数, $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots}_n = a_k \times n^k + a_{k-1} \times n^{k-1} + \cdots + a_0 + b_1 \times \frac{1}{n} + b_2 \times \frac{1}{n^2} + \cdots$ (最后 1 位小数不能为 0).

在表示式 $a = \overline{a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0}_n$ 中,实际记数时可以省略上划线而仅在右下角写出下标 n. 而 $n = 10$ 时,通常连下标也不写. 当 $n > 10$ 时,由于只有 10 个记数符号,因此可以借助于英文字母来表示 11, 12, …,也可以直接在 11, 12, … 上加括号 (11), (12), …,表示将 11 整体看成一个数位值. 如果这样,位值符号 11, 12, … 是借助于十进制数表示的,因此就不是严格意义的 n 进制表示数了,称之为十进制为基础的 n 进制混合表示.

例如, $321 = 2 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5 + 1 = \overline{2\,241}_5$, 对应于 $a = 321, n = 5, k = 3, a_3 = 2, a_2 = 2, a_1 = 4, a_0 = 1$. 这时 $\overline{2241}_5$ 的读法不是通常的“2‘千’2‘百’4‘十’1”,而只能是“2、2、4、1”. 同样 $321 = 2 \times 12^2 + 2 \times 12 + 9 = \overline{229}_{12}$. 而 $60 = \overline{10}_{60}, 66 = \overline{16}_{60}, 120 = \overline{20}_{60}$. 类似考虑小数的写法, 有 $0.\overline{(39)(36)}_{60} = \frac{39}{60} + \frac{36}{3\,600} = 0.66 \neq \overline{0.11}_{60} = \frac{1}{60} + \frac{1}{3\,600} = \frac{61}{3\,600}$, $\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3} = 0.\dot{0}\dot{1}_2$ 等.

4.3　实数是否是十进制

一个数是否是实数,是否是有理数,只是这个数本身的性质,与这个数用六十进制还是十进制表示没有关系. 一个实数,可以用二进制或者十二进制表示,不同的表示不影响它是否是实数的性质. 有理数是 2 个整数的比(分母非零),与这 2 个整数是否按照十进制写没有关系. $321, \overline{2241}_5, \overline{229}_{12}$ 都是有理数,且根本就是同一个数.

即使人们习惯用十进制表示一个数,也不可能用十进制表示所有的实数,即使是常用的数也不都是用十进制表示的. 事实上 $\pi, e, \sqrt{2}, \ln 2, \sin 3, 3^e$ 等都不是十进制表示,甚至 $\frac{1}{3}$ 也不是十进制表示,而 $\frac{1}{2} = 0.5$ 的右侧是十进制表示,但左侧并不是.

5　角的大小与度量

5.1　角的大小是否是角的度量

角的大小与角的度量(或者叫角的大小的度量)是不同的概念. 角的大小是一个几何客观,角的度量是角的一个度量化. 角的大小是角的集合上的一个序(任意 2 个角之间的次序,一个包含另一个的比较关系),这个序的公理化定义,是通过直线上点的序公理造成的线段的序来描述的. 文献[9]先描述了角的相等关系,然后指出可以进一步通过公理建立角的“大于”“小于”次序. 角的度量是由角的集合上的一个非负单调广义函数产生的,函数的递增性与角的大小次序一致,因此也可以说是角的大小的量化. 进一步讲,角的度量是角的集合上的一个测度,给每个角规定一个对应数值,这个数值是非负单调的,且这个对应具有可列可加性. 这一点在中学数学是不容易、因而也不必严格讲清楚的,更不需要按照公理来讲.

人民教育出版社 1963 年教材[10]把角的大小与角的度量当成 2 个独立的概念分开讲. 现行教材[11-12]说“要准确测量一个角的大小,应该用一个合适的角作单位来量”和“我们常用量角器量角”,将角的大小次序直接用角的度量值的大小来替代.

5.2　什么是“角的角度制”度量

常见的角的度量方法有弧度制和角度制 2 种,都是在角的集合上建立一个映射,将一个角对应到一个实数,这个数加上度量单位,就得到一个关于角的度量. 度量的数值与度量的关系,就是数与量的关系. 角度制与弧度制的具体表述,不同的教材中不完全一样,本质恰一致. 以直角的 $\frac{1}{90}$ 为 1° (1 度)[13], 或圆周的 $\frac{1}{60}$ 对应的圆心角为 1°[7];取半径等长的弧所对的圆心角作为 1 弧度,2 种度量都是通过选取某个特定角作度量单位来实现. 文献[14]

的第 3 页称,“度量角用的角度制和弧度制,在原理上并无差别,仅是采用不同的度量单位”. 文献[15]称,“无论用角度制还是弧度制,都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一一对应关系”.

由于历史的习惯省略了弧度的单位“radian”(也叫“弳”,现在多不用此词,简记为 rad,或^r),但保留了角度制的单位“度”或“°”. 文献[1]称“在现代的数学书籍与文献中,角一律用弧度为单位,无须用符号加以特别标注”“如不特别说明,有关三角函数的自变量一律认为以弧度为其单位”. 柯朗等[5]明确说,“为避免混淆,今后角 x 就是指角的弧度是 x, 而一个度数是 x 的角将写为 $x°$”. 因此,人们错以为“弧度制下角对应一个数,而角度制下角对应角度”的原因,是弧度制省略了单位“rad”而角度制没有省略单位“°”. 具体教学中,通常可以在开始时先将弧度单位写上,熟悉以后再省略.

一周 360°是英国的角度制,法国的角度制曾将圆周分成 400°,即百分制[14];除此之外还有将圆周分成 6 000 份的密位制[14]. 也用较粗糙的方法来度量角,例如,“周、圈、转”等,这些“角的度量”在实际应用时仍不可避免.

5.3 怎样理解“平角 = π”

当写“平角 = π”时,显然是“平角在弧度制下的度量 = π 弧度”或者“平角的弧度数 = π”的省略表达. 其实质为“平角对应于实数 π”,这与平角对应于 180,没有本质差别. 文献[13] 称,“如果在六十分法中 $x°$ 的角等于 y 弧度,则 $x = \frac{180}{\pi}y, y = \frac{\pi}{180}x$”,即“$x°$ 的角 $= y^r$ 的角”当且仅当“$y = \frac{\pi}{180}x$”.

对比于“1 m = 100 cm”,没有人会理解为“1 = 100”或者“1 = 100 cm”. 严格讲等式“$\frac{\pi}{6} = 30°$”没有意义,只能有“$\frac{\pi^r}{6}$ 的角 = 30°的角”,简称“$\frac{\pi^r}{6} = 30°$”. 平时说“一个角的大小是 1”是指“一个角的大小的弧度制度量为 1^r”, 若要说“1° 的角”,就得说“1 度的角”. 显然有“π° 和$\sqrt{2}$° 的角”,也有 “2^r 和 60^r 的角”.

5.4 怎样理解“弧度值是弧长与半径的比值”

弧度制下,角的度量值是对应的弧长与半径的比值,所以没有单位,或者无量纲,是一个实数. 这些理解可以照样搬到角度制上,见文献[7]. 因此角度的数值与弧度的数值一样,也是实数. 单位 rad 或者°,是为了说明这个数值是角的一个度量而加上的,用于区别数与量.

5.5 怎样理解“角度值是角与周角的比值”

按照角度制定义,将一个周角平均分成 360 份,其中 1 份对应的角为 1°,一个角占有几份就是几度,因此角度的数值是“角与周角的三百六十分之一的比”. “角与圆心角的比”的含义是将角看成是圆心角,根据圆心角与圆弧的一一对应,由对应的圆弧之比得到 2 个角的比. 值得注意的是,弧度制度量角和角度制度量角,都需要在圆弧长的求法,即弧长积分. 这表明,角的度量不是独立于长度的度量.

5.6 单位圆中角的度量是弧长

把角的度量看成弧长,显然是混同了度量的数值与度量. 在单位圆中,的确可以得到角的弧度数对应到相应的弧长. 这种对应,不仅在单位圆中,在半径为 2 的圆中,也作类似处理,使得每一个角对应于一个弧长,只是这个新的对应是习惯的那种的 2 倍而已,这样做并不改变弧度制的任何本质.

5.7 角度制中角度数是否是用六十进制表示

结合关于十进制与六十进制的讨论,看下面角度制表示的角:$\left(\frac{11}{10}\right)° = 1°6' = 1.1° \neq 1°1' = 1.001666\cdots°$,$1°30' = 1.5°_{60}$,$66° = 16°_{60}$. 常见的角度制表示角的数值中,有很多是以十进制为基础的六十进制混合表示法,并不是纯粹的六十进制. 文献[13]称其为“六十分法”.

6 单位圆上的三角函数

6.1 怎样理解直角三角形的三角比与单位圆中三角函数线的一致性

对于锐角三角函数,可以通过直角三角形对应边的比值来定义,也可以通过单位圆中三角函数线来定义,这是 2 个不同的定义方法. 因为一个是静态的比值,另一个是动态的对应,然而二者的区别并不那么大.

直角三角形中,给定一个角就得到一个确定的三角比(边的比). 在单位圆中,角对应的直角三角形斜边长是 1,三角比从数值上看有明显的几何意义(数值而已,例如,正弦函数值等于正弦线段的长度值). 三角函数定义的仍然是边的比值,与通过直角三角形的定义一样,仅仅是在 2 个相似的直角三角形中定义而已.

在直角三角形中,从三角比过渡到三角函数,并不是简单的.例如,对于角的取值,并不能如期待的那样,在 **R** 上任意连续变化取值;角连续变化取值时,如何判断对应的三角比值是连续变化的.若在单位圆上将角的变量 x 等同于对应的弧长,似乎 x 连续变化就解决了;然而要说明一个实数等同于一段弧长,需要弧长积分的概念与技术,需要弧长对于角的决定,再由角决定正弦线,从而得到函数.那么,又如何说明弧长连续变化使得正弦线长是连续变化的呢?以至于一本教师教学用书不得不困难而牵强地解释[15],"把实数轴想象为一条柔软的细线,原点固定在单位点 $A(1,0)$,数轴的正半轴逆时针缠绕在单位圆上,负半轴顺时针缠绕在单位圆上,那么数轴上的任意一个实数(点) t 被缠绕到单位圆上的点 $(\cos t,\sin t)$."

这些问题与三角函数的连续性究竟如何定义有关.Cauchy[16]证明了以下结论:"若 $f(x)$ 是在 **R** 上的连续函数,满足任给 $x,y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$,则 $f(x)=\cos ax$ 或 $f(x)=\cosh ax$".对于三角函数的多种定义,需要讨论它们的一致性,高夯[17]列举了利用函数方程的公理化定义、幂级数定义和积分定义.在中学数学中,通过直角三角形和单位圆 2 种定义,都不可能严格讲清楚所定义的三角函数具有连续性,在一般大学教材中也没有讲清楚,甚至就没有试图讲清楚.

通过单位圆来定义三角函数,可以推广到任意角,容易过渡到在直角坐标系中用坐标定义任意角三角函数,容易表示三角函数周期性的物理意义.

7　三角函数引起的集合对应

文献[1]说明弧度制的便利时,其中并没有列示:使用弧度制的必要性是"使三角函数成为实数集合到实数集合映射",事实上使用弧度制并不由于"这个"必要性.为说明此,要了解三角函数引起了哪些集合上的对应.

7.1　三角函数到实数集合的映射

三角函数到实数集合的映射见图 1,角的集合、角度的集合、角度数的集合、弧度的集合、弧度数的集合和实数集合,这 6 个集合之间有一一对应.一般地,不需要严格区分三角函数是从上述 5 个集合中的哪一个出发到实数集 **R** 的映射,只强调对应的结果是一个实数.文献[18]称"我们认为三角函数是角的函数,或是弧的函数,或是数的函数,其中变数由我们处理,可以解释为角或解释为弧,或解释为数".文献[15]称"无论用角度制还是弧度制,都能在角的集合与实数集 **R** 之间建立一一对应关系".

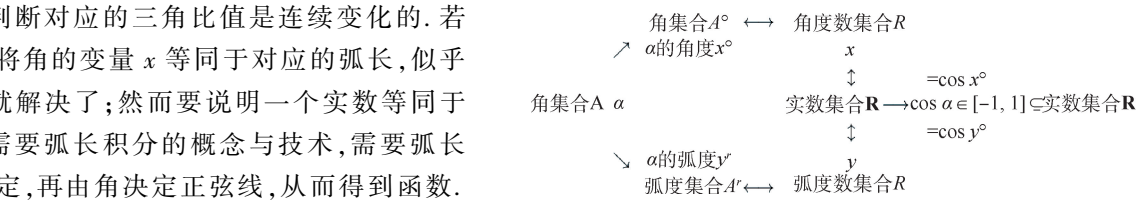


图 1　三角函数到实数集合的映射

在三角形 ABC 中,若 $\angle A$ 对应的角度为 60°,常有以下表达同时出现:$\cos\angle A$,$\cos 60°$,$\cos\dfrac{\pi}{3}$,而 $\cos\dfrac{\pi}{3}^{r}$ 不出现是因为弧度单位的省略.当考虑等式 $\cos 60°=\cos\dfrac{\pi}{3}$ 时,用的是 60°与 $\dfrac{\pi}{3}^{r}$ 所对的角相同,同角余弦值相等,而不是进行 $\cos 60^{r}=\cos\dfrac{\pi}{3}^{r}$ 或 $\cos 60°=\cos\dfrac{\pi}{3}°$ 的计算.事实上 $\cos 60^{r}=-0.952412980\cdots$,$\cos\dfrac{\pi}{3}°=0.998629534\cdots$.即使看不出 $\angle A$ 用什么度量,对 $\cos\angle A$ 的含义也是明确的.

7.2　弧度制与三角函数图像

是否因为弧度制使得三角函数图像中的横轴、纵轴上数值都是十进制,长度单位一致,所以从函数图像上容易理解函数的单调性、凸凹性、对称性等.

这是不对的.首先,绘制函数图像,有时为了看清较远的位置,故意将 2 个坐标轴的单位长度作不同比例压缩.其次,同一个数的不同进制表示,并不会改变数在坐标轴上对应点的位置.把一个数写成十进制还是六十进制,它在数轴上对应的点相对于 1 的位置是不变的,不可能引起长度单位的变化.最后,变量采用弧度制数值还是角度制数值画图,事实上是画 2 个不同图象 $f(x)=\sin x$ 与 $g(x)=\sin\dfrac{\pi x}{180}$.通过图象研究函数性质时,看喜欢或者习惯哪个.当在区间 $[0,\pi]$ 上画 $f(x)$,在区间 $[0,360]$ 上画 $g(x)$,并对横轴作压缩时,图像是一样的(图 2).当把 2 个图像画在一个坐标系中时,才出现图像对比解读的不同(图 3,坐标轴压缩由 Mathmatica 自动完成),例如,看不出真实的数据大小,看不出 $\sin x<x$.

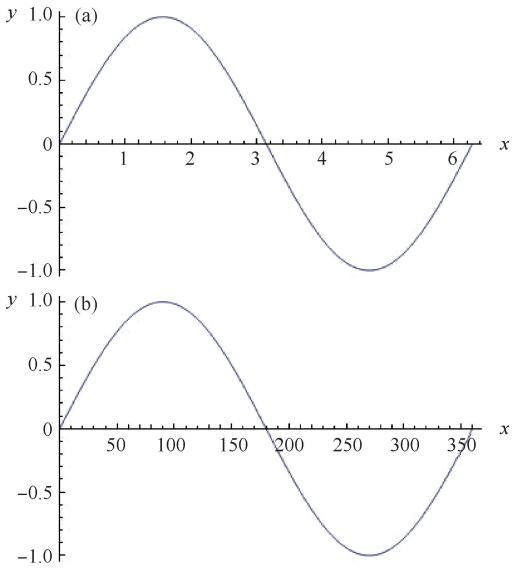


图 2 三角函数图像

(a)弧度制;(b)角度制

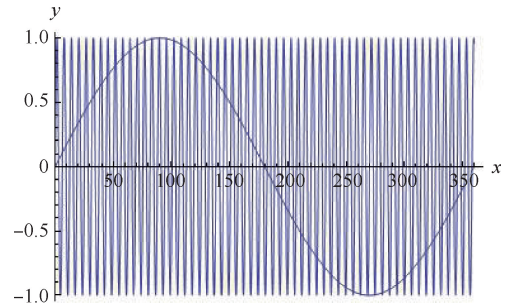


图 3 弧度制和角度制三角函数图像

8 “2017 课程标准”案例中的误解

讨论至此可以看到,“2017 课程标准”案例 3 中对于引进弧度制必要性的陈述多有误解和前后不一致之处,主要有:把自变量和函数值看成是有“单位”的量,提出了函数运算可能“不能进行”的说法,混淆了数学运算与运算结果的物理意义之间的区别,混淆了数与量的不同;把实数混同于实数表示的量,称“长度单位与实数单位一致,这就使得三角函数的自变量与函数值的取值都是实数”,引导理解实数就是长度;误解了角度制与弧度制的共性,忽视了弧度制中弧度单位的省略;称“60 进制的角度、不是 10 进制的实数”,把角度数引导理解为非实数,把六十进制数引导理解为不是实数;存在前后不一致的表述,一方面称不同“单位”的量“不能进行加、减等运算”,另一方面称“舍去具体背景”就“可以进行运算”;一方面说三角函数自变量的“单位”要取“长度”,另一方面称可以是“时间或其他量”.

关于“只有弧度制才能使得三角函数成为实数到实数的映射”的误解,从几本教材对弧度制及三角函数定义域的表述来看,似有其演变发展痕迹. 文献[19]的 50 页称,“当分别用‘弧度’为单位和用‘度’为单位来度量同一个角时,所得到的度量数是不同的.”文献[19]的 73 页又称,“根据六种三角函数的定义,当角 α 是用弧度制来度量时,这些三角函数的定义域如下表所示(引注,表中列示 **R** 或 **R** 扣除间断点 $\frac{\pi}{2}+k\pi$ 等,此处不列举)”. 这些表述,把角度制与弧度制看成仅是单位不同的 2 种平等的度量;指明了用弧度制表示定义域时,三角函数定义域的实数表达方式,没有引导理解角度制下定义域不是实数.

文献[20]的 126 页中称,“用弧度制来度量角,实际上是在角的集合与实数集 **R** 之间建立了这样的一一对应关系:每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应”. 在第二章“小结”时又对此作了重复强调. 这些表述,突出了在弧度制下,一个角对应一个实数,引导理解在角度制下做不到一个角对应一个实数;指明了用弧度制度量角得到三角函数定义域是实数,可能引导理解用角度制度量角得不到实数.

文献[21]中,欧拉在“无穷小分析概论中,提出把圆的半径作为弧长的度量单位,使得一个周角等于 2π 弧度,1 弧度等于周角的$\frac{1}{2\pi}$. 这一思想将线段与弧的度量统一起来,大大简化了三角公式及计算.”又称“在弧度制下角的集合与实数集 **R** 之间建立起一一对应的关系:每一个角都有唯一的一个实数(即这个角的弧度数)与之对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(角的弧度数等于这个实数的角)与它对应”. 这些表述混淆了角的弧度制度量与弧的度量,没有严格区分三角函数的变量是角还是数. 书中对三角函数与三角函数值也不区分[21]:“1. 将下列三角函数转化为锐角三角函数”;“3. 用诱导公式求下列三角函数值”(引注,都是计算题,此处不列举).

以上教材中,三角函数后面例题的编排中既有角度又有弧度,即对于三角函数的定义域或者变量的取值,都没有特别限定是角度还是弧度. 这与通常应用是一致的,也说明了没有必要区分三角函数的变量是角度数还是弧度数,总之都是实数.

只要认真思考,数学结论可以在相同的逻辑基础上说清楚,不存在由于概念理解模糊而造成的“商榷”.相信认真阅读上面讨论的人,可以减少对于“角度制不能使得三角函数变为实数到实数的映射”的坚持.弧度制能做到的事,角度制同样能做到,至于是否习惯或者方便,是另一个问题.

上述讨论的结论,在学生学习和教师教学具体执行中,可能带来困难,因为不可能完全如公理般严格地演绎数学概念.但不严格不等于可以作错误解释,因此教师要对这些问题认真理解,而学生要做到了解.

致谢:文章的起因得益于保继光教授的鼓励.修改过程中,与王安教授、鲁自群教授进行了讨论,得到了有益建议.张英伯教授、李克正教授浏览了初稿.张晓声教授、范兴亚博士以及其他研究生提供了修订意见.

参 考 文 献

[1] 李忠.为什么要使用弧度制[J].数学通报,2009,48(18):1-3,7.
[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2017:108+111.
[3] 史宁中.数形结合与数学模型:高中数学教学中的核心问题[M].北京:高等教育出版社,2018:283.
[4] 张奠宙,张广祥.中学代数研究[M].北京:高等教育出版社,2006:97.
[5] 柯朗,罗宾.什么是数学[M].左平,张饴慈,译.上海:复旦大学出版社,2005:64-86+285.
[6] 亚历山大洛夫.数学:它的内容、方法和意义:第一卷[M].北京:科学出版社,1984:10+26-27.
[7] KISELEV A P. Kiselev's geometry book I. Planimetry[M]. California: Sumizdat, 2006:18.
[8] 伍鸿熙.数学家讲解小学数学[M].赵洁,林开亮,译.北京:北京大学出版社,2016:4.
[9] 梁绍鸿.初等数学复习及研究:平面几何[M].北京:人民教育出版社,1979:12.
[10] 人民教育出版社.初级中学课本平面几何(暂用本)第一册[M].2 版.北京:人民教育出版社,1963:23+26.
[11] 人民教育出版社.义务教育教科书四年级数学上册[M].北京:人民教育出版社,2014:40.
[12] 人民教育出版社.义务教育教科书七年级数学上册[M].北京:人民教育出版社,2012:130.
[13] 小平邦彦.数学 I(日本高中数学)[M].长春:吉林人民出版社,1979:207-208.
[14] 陈鸿侠,朱凤豪.三角学讲义[M].北京:科学出版社,1984:3-5.
[15] 人民教育出版社.普通高中课程标准实验教材数学(A 版)必修 4 教师教学用书[M].北京:人民教育出版社,2004:3+8.
[16] KLAMBAUER G.数学分析[M].孙本旺,译.长沙:湖南人民出版社,1981:242.
[17] 高夯.现代数学与中学数学[M].北京:北京师范大学出版社,2010:169.
[18] 北京师范大学出版社.中学数学实验教材第三册:下[M].北京:北京师范大学出版社,1983:22.
[19] 人民教育出版社.高级中学试验课本数学Ⅱ[M].北京:人民教育出版社,1993:50+73.
[20] 人民教育出版社.高级中学课本代数上册(必修)[M].北京:人民教育出版社,1995:126+195.
[21] 人民教育出版社.普通高中课程标准实验教材数学:必修 4[M].A 版.北京:人民教育出版社,2004:7+9+33.

Misunderstandings in Learning and Teaching of Radian Measure of Angles

ZHU Yixin

(School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: Based on middle school mathematics, and in the way of questions and answers, the paper talks about doubts and misunderstandings related with concepts of degree measure of angles, function, decimal numeration, number and quantity, size and measurement of angles, etc. Those misunderstandings are made by students and math teachers respectively, in the process of learning and teaching in middle school mathematics classes. The paper finds some misunderstandings in Case 3 of "Compulsory Education Mathematics curriculum standards 2017 edition", and gives what are correct ones.

Keywords: radian measure of angles; degree measure of angles; decimal numeration; size of angles