DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.04.005

在极限理论教学中培养学生的辩证思维

王雪琴 成荣强

(渭南师范学院数学与信息科学学院,陕西 渭南 714000)

摘 要

利用辩证思维的关联性,建立极限概念内部及与其它知识的关联,培养学生发散思维的能力;利用辩证法思维中量变质变规律,培养学生综合知识的能力;利用辩证法思想中对立统一规律,培养学生辩证思维的能力;利用辩证思维否定之否定规律,培养学生的创新思维能力.

关键词: 极限理论,数学分析,辩证思维,微积分.

中图分类号: G642

1 引 言

极限不是数学分析课程的核心研究对象,但是它属于数学分析中研究函数性质的奠基工程,换句话,它是数学分析课程的理论基础,在数学分析中处于十分重要的地位,正如国外学者所言"极限是正确理解微积分和发展数学思维的最基本的数学概念之一."[1] 因此,正确理解极限的概念并学会用极限理论分析、解决相关问题就显得尤为重要.徐利治先生在课堂上引入极限概念时,常用李白的《送孟浩然之广陵》[2] 诗"故人西辞黄鹤楼,烟花三月下扬州,孤帆远影碧空尽,唯见长江天际流."让学生体会一个变量(孤帆)趋向于零(碧空尽)的动态意境.但是,如何才能让学生准确理解极限定义的真谛,实践证明,只靠形象思维是不够的,还需要在极限教学中引入辩证思维方式,才能深入探索抽象的极限概念及相关理论.

辩证思维强调辨析、证明,强调根据客观事物自身的辩证本质进行思维与分析,认为人们可以通过概念、判断、推理等思维形式对客观事物辩证发展的过程做出正确地反映,实际也就是对客观事物辩证法的反映.辩证思维最基本的特点是将研究对象作为一个整体,从其内在矛盾的运动、变化及各个方面的相互联系中进行考察,以便从本质上系统地、完整地认识其对象.人类思维的发展,一般都是由形象思维到抽象思维,再由抽象思维到辩证思维.可见,辩证思维是最高形式的思维运动,辩证思维方法是最高层次的科学方法.客观上,辩证思维就是在辩证唯物主义基础上,吸收了现代自然科学、社会科学研究方法的积极成果而形成的一种当代最科学的思维方式.研究并掌握这种思维方式,进而学会自觉地运用这种思维方式分析解决问题,对指导人们的实践活动具有十分重要的意义.数学分析课程基本内容的学习与运用也不例外.

之所以辩证思维对人们有如此大的作用,就在于辩证思维是用全面的、联系的、发展的观点看世界,它从不同角度揭示了自然、社会和人类思维发展的一般规律.数学理论的产生和发展正符合辩证法阐述的事物发展的一般规律.恩格斯在《自然辩证法》中说'数学中的转折点是笛卡尔的变数,有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了."由此,可得出辨证思维是微积分理论的一大支柱,与极限理论二者是紧密相连的,辩证法为极限理论的研究提供了良好的世界观与方法论,对学生世界观的形成和方法论意识的建立有着非常重要的意义.

2 学生在极限理论学习中容易产生误解的现状及归因

学生对极限概念的理解学习一直是数学分析教

收稿日期: 2015-08-18

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

学的一个重要难题,教学中发现有相当多的学生对极限概念的理解首先容易产生误解,进而影响到后继内容的学习. 具体来说,不仅影响对极限概念本身的理解,而且也影响对函数连续、可微以及无穷级数等的理解. 因此,笔者结合自己极限理论教学实践中对辩证思维的应用,对极限定义进行剖析, 力求抽丝剥茧,层层推进,让学生明白极限定义的抽象性,同时对极限理论中所隐含的辩证思维加以总结分析,旨在提高数学分析课堂教学的效率.

2.1　学生在极限内容学习中容易产生误解的现状

数学分析具有高度的抽象性和逻辑性,并且数学分析的教学注重理论的完整性、知识的系统性和推理的严谨性,这样长期以来的学习环境,使得一些学生态度上往往产生畏难情绪,主要表现在以下方面.

2.1.1　学习极限内容的思维方法传统

有较多的学生从思想上认为,学习数学就是靠教师教好,教师教得好,学生才能学得好,因此,学习数学的参与精神欠缺,这种情况多发生在一些刚入大学的新生在学习数学分析时,遭遇的第一难关就是极限的概念,学生在学习时总是感到云里雾里,不知所以然,特别是学生对极限的"$\varepsilon - N$"定义中的任意给定的 ε 的任意性与给定性迷惑不解,正是由于对极限概念的无法理解,造成了用概念证明数列的敛散性及收敛数列性质的障碍.

2.1.2　学习极限内容的态度被动

学习极限内容的态度被动表现在,课堂上常常习惯于教师讲,学生听,缺乏主动学习的积极性. 感到极限内容难学、乏味. 加之客观上有较多学生的逻辑思维能力和推理能力较差,学习积极性不够,自学钻研精神不强等,各方面原因使得学生对这门课程产生了恐惧心理,具体来说,学生学习中碰到的第二个突出的难题,即是分不清潜无限与有限的区别,常常把潜无限看成有限,因此在计算此类问题的极限时,错误不断.

2.1.3　分析、解决数学极限问题的能力甚差

由于以上问题的存在,使得一些学生平时学习被动,对极限概念的不理解也造成后续学习导数、积分、级数等概念时的极大困扰. 长期问题累积,不求甚解,常常满足于完成必须做的作业,很少就这个方面的相关问题展开讨论、争论等,从而导致分析、解决数学极限问题的能力甚差. 以至于在考试中此类问题的出错率过高.

2.2　学生在极限内容学习中形成误解的归因

2.2.1　过时的思维方法的影响

过时的、传统的思维方法与学习方法的影响,这是导致问题出现最主要的一个原因. 十多年中小学教学虽然经过教育改革,整体上变化很大,但是传统的教师教,学生学单向信息传递的教学方法仍然存在. 至今一些数学课堂上的教学,有的教师仍然采用的是静止的、固定的观点来分析研究问题,必然对学生造成一定程度的消极影响. 进入大学后各方面的适应需要一个过程,加之数学分析课研究的是变量数学,采用的是运动的、变化的观点来研究问题,由于学生在中小学所形成的学习思维方法是直观的、静止的,因而在大学开始接触数学分析这类变化的新的知识体系时,就显得慌乱不堪,茫然无措.

2.2.2　未形成科学的学习态度

科学的态度是科学素养的重要内容,形成科学的态度,对于学生热爱科学、积极投入科学学习过程发挥着很大的动力作用. 刚入大学的新学生在知识结构方面有着重大缺陷,主要表现在中学生缺少辩证思维的系统知识,相对缺少对逻辑系统知识的掌握,同时中学数学很少涉及数学史知识,这样就让学生理解极限概念有了诸多不便和障碍.

2.2.3　正确的学习动机未能及时强化

学习动机是推动学生学习的内部动力. 大一新学生的数学思维能力方面存在一定差距,有待提高和升华. 主要表现在新学生在直观和形象思维能力上表现出优势,比如对几何意义的理解就很充分. 但是,对抽象概念的理解和思维能力就相对欠缺,比如对极限概念的理解. 诸多缺陷,需要数学分析教师想办法在新的教学过程中,有意识、有步骤、有计划地帮助学生完成思维方法的转变,提高学生的思维能力,扩大和完善学生的知识面,促进新学生数学辩证思维的形成.

3　培养学生学会辩证思维的极限理论教学新策略

以上问题的存在,如不及时予以解决,任其长期发展,必然直接影响学生其它一些专业课程的学习,甚至带来其它方面意想不到的消极影响. 只有客观面对现实,在分析原因的基础上,针对性采取积极的纠正措施,师生团结一致,现存的问题才会逐渐得以消解,也才能把提高教育教学质量放在可靠的基础上. 为此,我们要创造条件,坚持以学生为主体,师生

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

互动,在培养学生学会辩证思维上狠下功夫,结合数学极限理论教学的实际,具体提出以下积极的教学策略.

3.1 建立极限概念内部及与其它知识的关联,培养学生发散思维的能力

辩证思维最重要的就是建立起来事物都是普遍联系的观念. 普遍联系的观点广泛地存在于数学分析理论中,微积分的概念是建立在极限概念的基础上. 即导数与积分的概念都是由极限的定义来定义的,级数是部分和数列的极限问题,归结原则把离散问题与连续问题联系起来,考虑在求极限时把离散的问题利用归结原则变为连续问题利用罗比达法则来解决. 定积分的定义也为求数列的极限提供了有效的方法,建立了离散问题与连续问题的关联. 甚至当把两种表面上看似无关的数学知识联系起来时,会产生奇迹. 例如,狄利克雷函数为非初等函数,开始以分段函数的形式出现,学了极限理论后重新定义为

$D(x) = \lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}[\cos m!\,\pi x]^{2n}$[3],从这表达式来看,利用累次极限这个工具把没有任何关系的非初等函数与余弦函数联系起来,既丰富了非初等函数的表达形式,又让狄利克雷函数以新的面貌出现,为进一步研究狄利克雷函数的性质奠定了基础. 再如,数列极限"$\varepsilon - N$"定义利用不等式工具把 $n\to\infty$ 与 $a_n\to a$ 刻画的既准确又简明,在定义中用 ε 来刻画数列$\{a_n\}$ 接近与 a 的程度,通过 $|a_n - a| < \varepsilon$ 不等式把它们联系在一起,用 N 来刻画 n 趋于 ∞ 的程度,通过 $n > N$ 来体现,N 依赖于 ε 但不由 ε 唯一确定,有时表示为 $N(\varepsilon)$,它们相互制约,相互联系在一起. 这些正是辩证思维联系理论在极限定义中的渗透,使得极限定义成为一个不可分离的有机整体. 正如德国数学家希尔伯特所说"数学是一个有机体,它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合". 可见,建立极限概念内部及与其它知识的关联,培养学生发散思维的能力很重要. 教师应该创造条件,将教知识与学习方法有机地结合起来.

3.2 揭示极限概念中对立统一,培养学生辩证思维的能力

对立统一规律揭示了事物发展的源泉和动力,矛盾对立面的同一和斗争推动着事物的发展. 极限概念中含有互相矛盾的双方,它们既对立又统一构成这种理论存在和发展的前提. 无限与有限是一对矛盾,无限不能脱离有限而存在,没有有限也就没有无限,因此定量地描述无限,总借助一系列无限多个定数来完成. 在 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$ 的定义中,透过形式看实质不难看出,凡变量极限过程,都是具有潜无限与实无限双重性质的变量趋向极限的过程[4]. 极限过程的体现是通过数学表达式对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists N\in N^+$,当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 来刻画的. 从表达式来看任意(ε)与存在($\exists$)是一对矛盾,从整个过程来说正数 ε 是任意变化的变量,但从过程的每个瞬间来说正数 ε 是固定的常量,从局部与整体的关系来看,它们的对立既体现在局部的有限性与整体的无限性,又体现在过程的动态性与瞬间的静态性,正是正数 ε 的双重性把极限概念中的两个无限刻画的淋漓尽致,这就使人们可以用不等式的方法解决极限的存在问题,并使抽象的极限问题符号化,正是"有限"与"无限"的对立统一构成了极限概念存在和发展的基础. 我们还注意到,在极限理论中,无穷小量是一种特殊的变量,它在变化过程中不等于零(只考虑除"0"外的一般无穷小量),但它的变化趋势却是零,或者可以说,它在变化的过程中不等于零,但作为变化的结果,它却等于零. 这个性质具体而且生动地说明了无穷小量具有零与非零的辨证性质. 由此,在教学中逐步树立起学生的对立统一观念,形成辩证思维的内核.

3.3 探索极限理论中的量变质变,培养学生的复合思维能力

恩格斯指出[5]:"纯粹的量的分割是有一个极限的,到了这个极限它就转化为质的差别了."量变质变规律指出了量变、质变是事物运动变化的两种最基本状态,事物的发展变化都表现为由量变到质变,再由质变引起新的量变的反复过程. 极限理论中体现着量变质变规律. 一方面,极限中概念的存在都有着特定的量的界限,如果量变超出了这个界限,就会发生质变,形成另一种概念,这种新概念又存在着自己特有的新的量变. 非常著名的 Wallis 公式[6] $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \pi$ 十分明显地体现量变质变规律. 从等式来看,数列中的每一项都为有理数,随着量由有限到无限的转变,性质却发生了质的变化,即极限值却为无理数,同时也建立了整数 n 与无理数 π 之间的一种不寻常的关系. 而等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$ 则从三个方面体现着量变质变规律. 其一,每个数都是有理数,有限个有理数的和为有理

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数,但当有限个有理数的和变为无限个有理数的和时结果却发生了质的变化,即结果是无理数; 其二,由于任意有限个无穷小量的和仍为无穷小量,但无限个无穷小量的和却是一个非零的常数,也就是说无限个无穷小量的和不一定为无穷小量,性质发生了质的变化. 其三,任意有限个和的极限等于极限的和,但对于无限个和的极限结论却不一定成立. 由此引出了新的概念——级数,级数实质就是另一种形式的极限.

通过这个事例告诉我们,数学极限理论知识虽然抽象,但是教师的教学方法很重要. 如何让数学基础知识不太好的学生既学到数学极限知识,又逐渐学会运用数学极限知识. 面对这个难题,要求教师善于把抽象、繁琐的理论知识直观化、简单化、明白化,形象化,便于让学生接受.

3.4　研讨极限理论中否定之否定,培养学生创新思维的能力

否定之否定规律揭示了事物自己发展自己的完整过程是: 经历两次否定、三个阶段,即由肯定达到对自身的否定,并再由否定进到新的肯定——否定之否定. 每一个数学理论的发展都符合否定之否定规律. 在理论最初形成时,该理论得到肯定; 随着实践的需要和研究的深入,该理论的不完善、不精确之处逐渐暴露出来并被否定; 进而数学家们开始研究如何使该理论更完善、更精确,最终得出新的结论,达到新的肯定. 文献[6]指出: "每一种事物都有它的特殊的否定形式,经过这样的否定,它同时就获得发展,每一种观念和概念都是如此. "无穷小理论的发展体现了否定之否定的辩证思维规律,牛顿、莱布尼兹在创建微积分理论的基础是无穷小量,无穷小量一开始不即是零(因可用无穷小量除)却又等于零(忽略不计),这样把无穷小量"召之即来,挥之即去"的做法,在十八世纪引起了争论,对于无穷小量所带来的数学本身非逻辑非严谨性的问题,那些曾具体从事微积分研究的数学家们早就有过这样或那样的思考,在他们之间并展开过激烈的讨论和争论,称它是"逝去的灵魂",无穷小量忽略不计是暴力镇压等. 虽然它们不是用任何一种数学方法或逻辑方法推导出来的、不够完备,但它们却有强大的生命力. 正如马克思所评论的"这是人间纯粹实验地发现的. "[7] 这种不能自圆其说的无穷小量,遭到了十八世纪中期的英国大主教贝克莱初步的否定,进而建立了极限理论,用潜无穷小量取代了实无穷小量,实无穷小量遭到了彻底的否定. 然而极限理论虽然使微积分的表述严格化了,但是仍存在缺陷,即不具备实无穷小量的简易性和生动性,又仅仅是个验证方法,因而又出现了对潜无穷小量的否定,也就是对实无限小量否定的否定[8]. 一九六零年,美国耶鲁大学数理逻辑学家 A. Robinson 运用现代数理逻辑的方法和新成果,第一次成功地证明了实无穷小量的存在性,从而使牛顿、莱布尼兹时代的无穷小量重返数坛,从哲学的角度看无穷小量获得了新生,经过否定之否定后的实无穷小量发展了,提高了,完善了. 由此带来学生知识面的扩充,增加了学生学习新知识的兴趣,进而完成学生思维能力的转变和提升.

综上所述,数学教学不仅传授给学生数学知识和能力,更重要的是教给学生数学思维与方法,特别是辩证的思维及方法,进而提高数学素质,促进学生全面发展. 结合数学极限理论的教学来说,只有将辩证思维方法的分析过程渗透于具体数学知识、技能的教学之中去,才能使学生真正看到辩证思维的魅力,并使学生真正地理解、掌握极限知识的内涵,并将其思想加以推广到所有微积分的知识学习中去. 只要教师在极限理论教学中有意识、有步骤地贯穿辩证思维,坚持教学互动,坚持以学生为中心,就会促进学生发展. 例如对新学生学习极限理论,首先帮助他们形成新的观念,养成新的思维习惯很重要. 进而有计划地完善他们的学习结构,提高思维能力,提高分析、解决实际问题的能力将有着非常重大的意义和积极作用. 这也使得我们从中进一步认识到了哲学与数学的辨证关系,教师可以通过教学深化马克思主义的科学的思维方法,把数学分析课"讲活"、"讲透"、"讲深",让学生们能够"听懂"、"学会"、"成长",在课堂上能享受到辩证思维带来的乐趣,最终达到提高教学效率的目的,高质量完成教书育人的终极任务.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] Tall D. O. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof [A]. In: D A Grouws. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning [C]. New York: Macmillan, 1992.

[2] 徐利治. 微积分大意 [M]. 大连: 大连理工大学出版社,2007.

[3] 刘玉莲,杨奎元,吕凤. 数学分析讲义学习指导书 [M]. 北京: 高等教育出版社,1990.

[4] 徐利治,郭锡伯. 有关无限观的三个问题 [J]. 高等教育研究,2009,1:3 - 6.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 北京: 高等教育出版社,2010.

[6] 刘影,程晓亮. 数学教学论 [M]. 北京: 北京大学出版社,2009.

[7] 马克思. 数学手稿 [M]. 北京: 人民出版社,1975.

[8] 刘广云. 变量数学思维引论 [M]. 北京: 科学出版社,2007.

[9] 恩格斯. 自然辩证法 [M]. 北京: 人民出版社,1971.

In the Limit of Theory Teaching to Cultivate the Students´ Dialectical Thinking

Wang Xueqin Cheng Rongqiang

(College of Maths and Information Science, Weinan Teachers University, Weinan Shaanxi 714000)

Abstract

By using the dialectical thinking, the correlation of internal and establishing the concept of limit and other related knowledge to cultivate students´ ability of divergent thinking. By using the quantitative change law of qualitative change in the dialectic thinking to cultivate students´ comprehensive ability of knowledge. By using the law of unity of opposites in the thought of dialectics to cultivate students´ ability of dialectical thinking. By using the dialectical thinking in the law of negation of negation to cultivate students´ innovative thinking ability.

Key words: the limit theory, mathematical analysis, dialectical thinking, differential and integral calculus.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net