DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.05.003



# Lucas 数列的模数列的周期性

陈 小 芳

(渭南师范学院数学与信息科学学院,陕西 渭南 714000)

**摘 要**

针对 Lucas 数列 $\{L_n\}$ 以及给定的正整数 $m$,由 $L_n$ 关于模 $m$ 的最小非负剩余 $b_n$ 构成一个新的数列$\{b_n\}$,称为 Lucas 数列的模数列. 利用初等数论的相关知识和数学归纳法,证明了 Lucas 数列的模数列是周期数列,并且是纯周期数列.

**关键词:** Lucas 数列,模数列,周期数列,纯周期数列.
**中图分类号:** O156.2

## 1 引 言

著名的 Lucas 数列是非常重要的数列,它由二次线性递推公式 $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 给出,其中 $L_0 = 2, L_1 = 1$. 其通项为: $L_n = \alpha^n + \beta^n (n \geqslant 0)$, $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Lucas 数列有许多重要的性质,众多学者对其进行了研究,得到了很多有益的结果[2-3]. 笔者用 Lucas 数列 $\{L_n\}$ 构造了一个新的数列$\{b_n\}$,称为 Lucas 数列的模数列. 继而说明这个数列是一个周期数列,而且是一个纯周期数列[1].

**定义** 设 $\{L_n\}$ 是 Lucas 数列, $m$ 是任意取定的正整数,如果 $b_n$ 是 $L_n$ 除以 $m$ 的最小非负余数(也称为最小非负剩余),亦即 $L_n \equiv b_n (\mathrm{mod}\ m)$,其中 $b_n \in A = \{0,1,2,\cdots,m-1\}$,称数列$\{b_n\}$ 是 Lucas 数列的模数列,记为$\{L_n(\mathrm{mod}\ m)\}$.

例如,当 $m = 2$ 时, $\{L_n(\mathrm{mod}\ 2)\} = \{0,1,1,|0,1,1,|0,1,1\cdots\}$;

当 $m = 3$ 时,$\{L_n(\mathrm{mod}\ 3)\} = \{2,1,0,1,1,,2,0,2,|2,1,0,1,1,2,0,2,|2\cdots\}$;

当 $m = 5$ 时,$\{L_n(\mathrm{mod}\ 5)\} = \{2,1,3,4,|2,1,3,4,|2,1,3,4,\cdots\}$.

当 $m = 7$ 时,$\{L_n(\mathrm{mod}\ 7)\} = \{2,1,3,4,0,4,4,1,5,6,4,3,0,3,3,6,|2,1,3,4,0,4,4\cdots\}$

显而易见,除前两项外,Lucas 数列 $\{L_n\}$ 是一个递增的无界数列,而数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ m)\}$ 则是一个有界数列.

收稿日期:2014-06-10

## 2 主要定理

**定理 1** Lucas 数列 $\{L_n\}$ 的模数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ m)\} = \{b_n\}$ 是一个周期数列,即存在非负整数 $k$ 及正整数 $T$,使得 $b_{n+T} = b_n (n = k, k+1, k+2, \cdots)$ 成立.

**定理 2** Lucas 数列 $\{L_n\}$ 的模数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ m)\} = \{b_n\}$ 是一个纯周期数列,即对于任意非负整数 $k$ 及正整数 $T$, 均有

$$b_{n+T} = b_n \tag{1}$$

成立.

将以上结论推广到与 Lucas 数列 $\{L_n\}$ 相关的另一个数列,即 Lucas 数列的前 $n$ 项和数列$\{S_n\}$,其中 $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \cdots + L_n, n = 0,1,2,\cdots$.

**定理 3** Lucas 数列 $\{L_n\}$ 的前 $n$ 项和数列的通项公式为: $S_n = L_{n+2} - 1$.

**定理 4** 若数列 $\{a_n\}$ 是以 $T$ 为周期的周期数列,则数列$\{c_n\} = \{a_n + c\}$(其中 $c$ 为任意常数) 也是以 $T$ 为周期的周期数列;且若数列$\{a_n\}$ 是以 $T$ 为周期的纯周期数列,则数列$\{c_n\} = \{a_n + c\}$(其中 $c$ 为任意常数) 也是以 $T$ 为周期的纯周期数列.

**定理 5** Lucas 数列 $\{L_n\}$ 的前 $n$ 项和数列的



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\{S_n\}$ 的模数列$\{S_n(\mathrm{mod}\ m)\}$是一个周期数列,并且是一个纯周期数列.

## 3 定理的证明

### 3.1 定理 1 的证明

考虑有序数组

$$(b_0,b_1),(b_1,b_2),(b_2,b_3),\cdots,(b_n,b_{n+1}),\cdots \tag{2}$$

规定,$(b_i,b_{i+1})=(b_j,b_{j+1})\Leftrightarrow b_i=b_j,b_{i+1}=b_{j+1}$. 如果不考虑元素间的顺序,仅仅作为一个集合来看,$\{L_n(\mathrm{mod}\ m)\}$至多含有 $m$ 个元素:$0,1,2,\cdots,m-1$($\{L_n(\mathrm{mod}\ \mathrm{m})\}$不一定是恰好含有这 $m$ 个数,比如模 $m=5$ 时,模数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{2,1,3,4,|2,1,3,4,|2,1,3,4,\cdots\}$其中就不含有元素 0),因此,有序数组(2)中至多有 $m^2$(从 $m$ 个互不相同的元素中任意取两个元素的可以重复排列的排列总数)个互不相同的有序数组,而(2)是无穷数组,所以必然存在非负整数 $k$ 与正整数 $T$,使得

$$(b_k,b_{k+1})=(b_{k+T},b_{(k+T)+1}) \tag{3}$$

成立. 在此,$T$ 是使得(2)式成立的最小正整数.

以下用数学归纳法证明:当 $n\geqslant k$ 时,有

$$b_{n+T}=b_n \tag{4}$$

成立. 当 $n=k$ 时,由(3)可得 $b_{k+T}=b_k$ 和 $b_{k+1+T}=b_{k+1}$ 成立. 假设(3)对于正整数 $n$ 和 $n+1$($n\geqslant k$)成立,以下考察 $n+2$ 的情形. 由模数列$\{b_n\}$的定义以及 Lucas 数列$\{L_n\}$和归纳假设可得

$$\begin{aligned} b_{(k+2)+T} &\equiv F_{(k+2)+T}=F_{k+T}+F_{(k+1)+T}\\ &\equiv b_{k+T}+b_{(k+1)+T}=b_k+b_{k+1}\\ &\equiv F_k+F_{k+1}=F_{k+2}\equiv b_{k+2}(\mathrm{mod}\ m)\end{aligned}$$

由于 $b_{(k+2)+T}$ 与 $b_{k+2}$ 同属于集合$\{0,1,2,\cdots,m-1\}$,由上式可得,$b_{(k+2)+T}=b_{k+2}$,即对于正整数 $n+2$,(4)式也成立. 由归纳法原理,当 $n\geqslant k$ 时,(3)式恒成立.

### 3.2 定理 2 的证明

根据定理 1,有 $b_{n+T}=b_n(n=k,k+1,k+2,\cdots)$.

若 $k=0$,则定理 2 成立.

若 $k>0$,据定理 1 知 $b_{k+T}=b_k$ 和 $b_{k+1+T}=b_{k+1}$ 都成立. 因此,

$$L_{k+T}\equiv L_k(\mathrm{mod}\ m) \tag{5}$$

和

$$L_{k+1+T}\equiv L_{k+1}(\mathrm{mod}\ m) \tag{6}$$

都成立.

以(6)减去(5)有

$$L_{k-1+T}\equiv L_{k-1}(\mathrm{mod}\ m) \tag{7}$$

从而,$b_{k-1+T}\equiv b_{k-1}(\mathrm{mod}\ m)$. 又 $b_{k-1+T}$ 与 $b_{k-1}$ 同属于一个集合$\{0,1,2,\cdots,m-1\}$,因此,$b_{k-1+T}=b_{k-1}$. 以(5)减去(7)得

$$L_{k-2+T}\equiv L_{k-2}(\mathrm{mod}\ m) \tag{8}$$

同理可知,$b_{k-2+T}\equiv b_{k-2}(\mathrm{mod}\ m)$.

又 $b_{k+T}$ 与 $b_k$ 同属于一个集合$\{0,1,2,\cdots,m-1\}$,因此,$b_{k-2+T}=b_{k-2}$.

依次仿照以上的过程做下去,最后可以得到 $b_{k-1+T}=b_{k-1}$,$b_{k-2+T}=b_{k-2}$,$\cdots$,$b_T=b_0$. 即对于整数 $n=0,1,2,\cdots,k-1$,(1)式成立. 再由定理 1 可得,对于任何非负整数 $n$,(1)式恒成立.

### 3.3 定理 3 的证明

对 $n$ 利用数学归纳法

当 $n=0$ 时,$S_0=L_0=2=L_2-1$;假设命题对于 $n=k$ 时成立,即 $S_k=L_{k+2}-1$,则当 $n=k+1$ 时,利用 Lucas 数列的定义得

$$S_{k+1}=S_k+L_{k+1}=(L_{k+2}-1)+L_{k+1}=(L_{k+1}+L_{k+2})-1=L_{k+3}-1=L_{(k+1)+2}-1$$

即当 $n=k+1$ 时命题是成立的.

由周期数列的周期的定义立即可得定理 4 的结论. 根据定理 1、定理 2、定理 3 以及定理 4 立即可得定理 5 的结论.

## 4 其他说明

以本文的定理可以看出,Lucas 数列$\{L_n\}$关于模 $m$ 的最小非负剩余是呈周期变化的(Lucas 数列的前 $n$ 项和数列$\{S_n\}$关于模 $m$ 的最小非负剩余也是呈周期性变化的). 需要说明的是,这个周期与模 $m$ 有关,如:模数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ 2)\}=\{0,1,1,|0,1,1,|0,1,1\cdots\}$的周期是 3,模数列$\{S_n(\mathrm{mod}\ 2)\}=\{1,0,0|1,0,0\cdots\}$的周期是3. 模数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ 3)\}=\{2,1,0,1,1,2,0,2,|2,1,0,1,1,2,0,2,|2\cdots\}$的周期是8;模数列$\{S_n(\mathrm{mod}\ 3)\}=\{0,0,1,2,1,1,0,2|0,0,1,2,1,1,0,2,|\cdots\}$的周期是 8. 模数列$\{L_n(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{2,1,3,4,|2,1,3,4,|2,1,3,4,\cdots\}$的周期是4;模数列$\{S_n(\mathrm{mod}\ 5)\}=\{3,1,0,2|3,1,0,2|\cdots\}$的周期是4.

(下转第 31 页)



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

# Cluster Dynamical Mean-Field Theory Study of Mott Transition with Spin-Orbit Coupling

Zhang Xin　Ji Anchun*

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing　100048)

**Abstract**

The study of Hubbard model has been one of physical frontiers in the past decades for understanding the strongly correlated materials, and especially play fundamental roles in the study of high temperature superconductors. One of the intriguing features in Hubbard model is that the strong Coulomb interaction can makes electrons localized and induce the Mott transitions. Recently, spin-orbit coupling has been discovered to exist in many materials, the research on Mott transitions with spin-orbit coupling has attracted great theoretical interest. In this work, we study the Mott transitions of the Hubbard model with spin-orbit coupling in square lattice. We adopted the dynamical mean-field theory (DMFT) in this work to derive the phase diagram of whole parameter space, and find that spin-orbit coupling yields new properties beyond the traditional Hubbard model.

**Key words:** Mott transitions, spin-orbit coupling, dynamical mean-field theory, maximum entropy.

(上接第 12 页)

## 参 考 文 献

[1] 陈传理,张同君. 竞赛数学教程 [M]. 北京:高等教育出版社,2005,4:116.
[2] 陈小芳. Lucas 数列中素因子 2 的指数 [J]. 首都师范大学学报,2013,(5):6-7.
[3] 陈小芳. Lucas 数的标准分解式中素因子 3 的指数 [J]. 贵州师范大学学报,2013,(4):45-47.
[4] 陈小芳. 广义 Lucas 数列的一些求和公式 [J]. 价值工程,2011,(11):176-177.
[5] 晁晶晶. 广义杨辉三角形与 Lucas 数列的关系研究 [J]. 新乡学院学报,2011,(3):196-197.
[6] 晁晶晶. 杨辉三角与 Lucas 数列的一个关系 [J]. 长沙大学学报,2011,(2):5-6.

# The Periodicity of Modular Sequence of Lucas Sequence

Chen Xiaofang

(College of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan　714000)

**Abstract**

For the Lucas sequence $\{L_n\}$ and positive integer $m$, the new sequence $\{b_n\}$ which composed of least non-negative residue $b_n$ of module $m$ on $L_n$ is called module sequence of Lucas sequence. Based on the elementary number theory and mathematical induction, this paper proves that the modular sequence of Lucas sequence is both a periodic sequence and a simple periodic sequence.

**Key words:** Lucas sequence, modular sequence, periodic sequence, simple periodic sequence.



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net