DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.02.002

具有不对称非线性项平面系统周期解的存在性*(上)

马 田 田

(首都师范大学,北京 100048)

摘 要

本文研究具有非对称项的平面系统

$$\begin{cases} x' = f(y) + p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + p_2(t,x,y) \end{cases}$$

周期解的存在性. 在新的非共振条件下,应用连续性定理证明了该系统至少存在一个周期解.

关键词: 平面系统; 时间映射; 周期解

中图分类号: O175

1 前言及主要结论

考虑平面系统

$$\begin{cases} x' = f(y) + p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + p_2(t,x,y), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $f,g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续,$p_i:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}(i=1,2)$ 连续且关于第一个变量 t 是 2π 周期的.

系统(1.1)可以写成如下形式

$$Jz' = \nabla_z H(t,z) + P(t,z), \quad z=(x,y)\in\mathbf{R}^2, \tag{1.2}$$

这里 $J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 是标准的辛矩阵,$H:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}$ 关于变量 z 是连续可微的,并且关于变量 t 是 T 周期的,$P:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ 连续且对任意 $(t,z)\in\mathbf{R}^3$,有 $P(t+T,z)=P(t,z)$. 系统(1.2)的动力学性质已受到广泛研究(见[1,4,8-10,16]及其参考文献). 当 $H(t,z)=H(z)$ 是正二次齐次时,文献[4,9]研究了系统(1.2)周期解的存在性,解的有界性和无界性. 文献[10]研究了平面哈密顿系统

$$\begin{cases} x' = g_1(t,y), \\ y' = -g_2(t,x) \end{cases} \tag{1.3}$$

周期解的存在性. 假定下面的非对称条件成立,

$$a_\pm \leqslant \liminf_{y\to\pm\infty}\frac{g_1(t,y)}{y} \leqslant \limsup_{y\to\pm\infty}\frac{g_1(t,y)}{y} \leqslant a^\pm,$$

和

$$b_\pm \leqslant \liminf_{x\to\pm\infty}\frac{g_2(t,x)}{x} \leqslant \limsup_{x\to\pm\infty}\frac{g_2(t,x)}{x} \leqslant b^\pm,$$

这里 $a^\pm,a_\pm,b^\pm$ 和 $b_\pm$ 都是正常数. 若存在正整数 n 使得

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a_+}}+\frac{1}{\sqrt{a_-}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b_+}}+\frac{1}{\sqrt{b_-}}\right)<\frac{4}{n}, \tag{1.4}$$

和

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^+}}+\frac{1}{\sqrt{a^-}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b^+}}+\frac{1}{\sqrt{b^-}}\right)>\frac{4}{n+1}, \tag{1.5}$$

文献[10]证明了系统(1.3)至少存在一个周期解. 关于其它相关的结果可见[3,7,8,12-15].

本文在新的条件下研究系统(1.1)周期解的存在性. 假定 g 满足条件

(h_1) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\operatorname{sgn}(x)g(x)=+\infty$,

f 在无穷远处满足非对称条件,

(h_2) $0<l_+=\liminf\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f(y)}{y}\leqslant \limsup\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f(y)}{y}=l^+<+\infty$,

和

收稿日期:2018-03-28

* 国家自然科学基金青年基金项目(11501381)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

(h_3)　$0 < l_- = \liminf\limits_{y\to-\infty}\dfrac{f(y)}{y} \leqslant \limsup\limits_{y\to-\infty}\dfrac{f(y)}{y} = l^- < +\infty$.

另外,假定存在常数 $M_0 > 0$ 使得

(h_4)　对任意 $t,x,y \in \mathbf{R}$, 有 $|p_i(t,x,y)| \leqslant M_0$, $(i = 1,2)$.

本文将借助于时间映射来研究系统(1.1)周期解的存在性. 令

$$\tau(c) = \sqrt{2}\left|\int_0^c (G(c) - G(x))^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right|,$$

$$(G(x) = \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s).$$

$\tau(c)$ 通常称为时间映射. 文献[5,6]深入研究了映射 τ 的性质. 记

$$\tau_\pm = \liminf_{c\to\pm\infty}\tau(c),\quad \tau^\pm = \limsup_{c\to\pm\infty}\tau(c).$$

应用连续性定理[2], 本文证明了以下结论:

定理 1.1　假定条件 (h_i) $(i = 1,\cdots,4)$ 成立. 若存在一个正整数 n 使得不等式

$$(\tau_0)\qquad \frac{4\pi}{(n+1)l_*} < \tau_+ + \tau_- \leqslant \tau^+ + \tau^- < \frac{4\pi}{nl^*}$$

成立,其中 $l_* = \dfrac{\sqrt{l_+}}{l^+} + \dfrac{\sqrt{l_-}}{l^-}$, $l^* = \dfrac{\sqrt{l^+}}{l_+} + \dfrac{\sqrt{l^-}}{l_-}$, 则系统(1.1)至少存在一个 2π 周期解.

定理 1.2　假定条件 (h_i) $(i = 1,\cdots,4)$ 成立. 若不等式

$$(\tau_1)\qquad \tau_+ + \tau_- > \frac{4\pi}{l_*}$$

成立,则系统(1.1)至少存在一个 2π 周期解.

若存在正常数 a,b 使得

$$(h_5)\quad \lim_{y\to+\infty}\frac{f(y)}{y} = a,\quad \lim_{y\to-\infty}\frac{f(y)}{y} = b,$$

可以得到如下结论:

推论 1.3　假定条件 (h_i) $(i = 1,4,5)$ 成立. 若存在正整数 n 使得不等式

$$(\tau_2)\quad \frac{4\pi}{(n+1)l} < \tau_+ + \tau_- \leqslant \tau^+ + \tau^- < \frac{4\pi}{nl}$$

成立, 其中 $l = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$, 则系统(1.1)至少存在一个 2π 周期解. 特别地,当条件 (h_i) $(i = 1,4)$ 和 (τ_2) 成立时, 平面系统

$$\begin{cases} x' = ay^+ - by^- + p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + p_2(t,x,y) \end{cases}$$

至少存在一个 2π 周期解, 这里 $y^+ = \max\{y,0\}$, $y^- = \max\{-y,0\}$.

注记 1.4　推论 1.3 推广了[6]中的结果. 文献[6]证明了若存在一个正整数 n 使得不等式

$$\frac{2\pi}{n+1} < \tau_+ + \tau_- \leqslant \tau^+ + \tau^- < \frac{2\pi}{n}$$

成立, 则 Duffing 方程

$$x'' + g(x) = p(t) \qquad (1.6)$$

至少存在一个 2π 周期解. 因为方程(1.6)等价于系统 $x' = y$, $y' = -g(x) + p(t)$, 故有 $f(y) = y$. 这样 $a = b = 1$, 从而 $l = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}} = 2$. 因此,条件 (τ_2) 正好是[6]中的条件.

2　一个连续性定理

本文将应用[2]中的连续性定理证明系统(1.1)周期解的存在性. 为方便起见,下面先介绍这一定理.

考虑系统

$$z' = f(t,z),\quad z = (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2, \qquad (2.1)$$

这里 $f:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ 连续并且对任意 $(t,z) \in \mathbf{R}^3$, $f(t+T,z) = f(t,z)$. 将系统(2.1)嵌入到含有单参数 $\lambda \in [0,1]$ 的方程族

$$z' = F(t,z;\lambda), \qquad (2.2)$$

其中 $F:\mathbf{R}^3 \times [0,1] \to \mathbf{R}^2$ 连续,并且对任意 $(t,z,\lambda) \in \mathbf{R}^3 \times [0,1]$, 有

$$F(t+T,z;\lambda) = F(t,z;\lambda).$$

另外, F 满足

$$F(t,z;0) = f_0(z);\quad F(t,z;1) = f(t,z).$$

定理 2.1　(连续性定理)[2]　假定下列条件成立,

(1) 存在正常数 r_0 使得对于 $z' = f_0(z)$ 任意 T 周期解 $z(\cdot)$, 都有 $|z|_\infty \leqslant r_0$, 这里

$$|z|_\infty = |x_1|_\infty + |x_2|_\infty;$$

(2) 对任意 $r \geqslant r_0$, $d_B(f_0,B(0,r),0) \neq 0$, 其中 $B(0,r) = \{(x_1,x_2): x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2\}$;

(3) 对任意 $r_1 \geqslant 0$, 存在 $r_2 \geqslant r_1$ 使得对于系统(2.2)的任意 T 周期解 $z(\cdot)$ $(\lambda \in [0,1])$,

$$\min_{[0,T]}(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \leqslant r_1^2 \Rightarrow \max_{[0,T]}(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \leqslant r_2^2;$$

(4) 对任意正整数 n, 存在 $r_n > 0$ 使得对于系统(2.2)的任意 T 周期解 $(\lambda \in [0,1])$, $n(z) = n \Rightarrow \min_{[0,T]}(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \leqslant r_n^2$, 这里 $n(z)$ 表示周期解 $z(\cdot)$ 的旋转数. 则系统(2.1)至少存在一个 T

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

周期解.

3 基本引理

考虑含有单参数 $\lambda \in [0,1]$ 的平面系统

$$\begin{cases} x' = f(y) + \lambda p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + \lambda p_2(t,x,y). \end{cases} \tag{3.1}$$

令 $(x(t),y(t)) = (x(t,x_0,y_0,\lambda),y(t,x_0,y_0,\lambda))$ 表示系统(3.1)满足初始条件 $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$ 的解. 在本节中我们总是假定条件 (h_i) $(i=1,\cdots,4)$ 成立,记

$$G(x) = \int_0^x g(s)\,ds, \quad F(y) = \int_0^y f(s)\,ds.$$

下面给出系统(3.1)柯西问题解的大范围存在性. 由参考文献[16]可得如下引理.

引理 3.1[16] 系统(3.1)的任意解 $(x(t),y(t))$ 在整个 t 轴上有定义.

由文献[17]中定理 6.5 的证明可知下面的弹性性质成立.

引理 3.2 对任意 $R_1 > 0$,存在 $R_2 > R_1$ 使得下面的结论成立,

(1)若 $x_0^2 + y_0^2 \leqslant R_1^2$,则 $x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant R_2^2, t \in [0,2\pi]$;

(2)若 $x_0^2 + y_0^2 \geqslant R_2^2$,则 $x(t)^2 + y(t)^2 \geqslant R_1^2, t \in [0,2\pi]$.

引理 3.3[16] 存在 $R_0 > 0$ 使得当 $x_0^2 + y_0^2 \geqslant R_0^2$ 时,$\theta'(t) < 0$, $t \in [0,2\pi]$.

引理 3.4 假设条件 (τ_0) 成立. 设 $\{(x_j(t),y_j(t))\}$ 是系统(3.1)的一个 2π 周期解序列,其旋转数 $n(x_j,y_j) = k$(k 是一个固定的正整数),$j = 1,2,\cdots$,并且

$$\lim_{j\to+\infty}(\min_{t\in[0,2\pi]}(x_j^2(t) + y_j^2(t))) = +\infty,$$

则 $\tau_+ + \tau_- \leqslant \dfrac{4\pi}{kl_*}$.

引理 3.5 假定引理 3.4 的条件成立. 则有

$$\tau^+ + \tau^- \geqslant \frac{4\pi}{kl^*}.$$

参 考 文 献

[1] BOSCAGGIN A. Subharmonic solutions of planar Hamiltonian systems: a rotation number approach [J]. Adv Nonlinear Stud, 2011,11: 77 – 103.

[2] CAPIETTO A, MAWHIN J, ZANOLIN F. A continuation approach to superlinear boundary value problems [J]. J Differential Equations, 1990,88: 347 – 395.

[3] CAPIETTO A, WANG Z. Periodic solutions of Liénard equations with asymmetric nonlinearities at resonance [J]. J London Math Soc, 2003,68: 119 – 132.

[4] CAPIETTO A, DAMBRSIO W, MA T, et al. Unbounded solutions and periodic solutions of perturbed isochronous Hamiltonian systems at resonance [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2013,33: 1835 – 1856.

[5] DING T, IANNACCI R, ZANOLIN F. Existence and multiplicity results for periodic solutions of semilinear Duffing equations [J]. J Differential Equations, 1993,105: 364 – 409.

[6] DING T, ZANOLIN F. Time maps for the solvability of periodically perturbed nonlinear Duffing equations [J]. Nonlinear Anal, 1991,7: 635 – 653.

[7] DRABEK P, INVERNIZZI S. On the periodic boundary value theorem for forced Duffing equation with jumping nonlinearity [J]. Nonlinear Anal,1986, 10: 643 – 650.

[8] FONDA A, SFECCI A. A general method for the existence of periodic solutions of differential systems in the plane [J]. J Differential Equations, 2012,252: 1369 – 1391.

[9] FONDA A. Positively homogeneous Hamiltonian systems in the plane [J]. J Differential Equations, 2004,200: 162 – 184.

[10] FONDA A, MAWHIN J. Planar differential systems at resonance [J]. Adv Differential Equations, 2006, 11: 1111 – 1133.

[11] FUCIK S. Solvability of nonlinear equations and boundary value problems [M]. Boston: Reidel, 1980.

[12] QIAN D. Infinity of subharmonics for asymmetric Duffing equations with the Lazer-Leach-Dancer condition [J]. J Differential Equations, 2001,171: 233 – 250.

[13] LAZER A C, MCKENNA P J. Existence, uniqueness and stability of oscillators in differential equations with asymmetric

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

nonlinearities [J] . Trans Amer Math Soc, 1989,315: 721 - 739.

[14] ALONSO J M, ORTEGA R . Roots of unity and unbounded motions of an asymmetric oscillator [J] . J Differential Equations,1998, 143: 201 - 220.

[15] DANCER N. Boundary value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations [J] . Bull Austral Math Soc, 1976,15: 321 - 328.

[16] WANG Z, MA T. Infinitely many periodic solutions of planar Hamiltonian systems via Poincaré-Birkhoff theorem [J] . Boundary Value Problems, 2018: 102.

[17] KRASNOSEL´SKII M A. The operator of translation along the trajectories of differential equations [M] . R I: Amer Math Soc, Providence, 1968.

Periodic Solutions of Planar Systems with Asymmetric Nonlinearites

MA Tiantian

(Capital Normal University,Beijing　100048)

Abstract

In this paper, we study the existence of periodic solutions of planar systems of the type

$$\begin{cases} x' = f(y) + p_1(t,x,y), \\ y' = -g(x) + p_2(t,x,y). \end{cases}$$

By using the continuation theorem, we prove that the given system has at least one periodic solution provided that some new non-resonant conditions hold.

Keywords: planar systems; time map; periodic solution

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net