DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.04.006

带电粒子在外场和表面附近运动状态的探究

唐 田 田

(烟台南山学院数理教学部,烟台 265713)

摘 要

从量子力学的角度推导出带电粒子在磁场和电介质表面的运动方程,探究哈密顿运动微分方程的解,并用计算机对特殊运动轨迹进行了模拟,使其更形象更直观的了解带电粒子在磁场和电介质表面附近的运动情况.

关键词: 哈密顿量,磁场,电介质表面,数值模拟.

中图分类号: O412.3

许多教科书和文献都对带电粒子在电场和磁场中的运动问题作了讨论[1-6],不但包括一些特殊情况,有些文章对普遍规律也进行了研究,其应用十分广泛. 比如,实验室中的阴极射线管,高能物理中常用的回旋加速器、质谱仪等设备都应用和涉及到这方面的规律和知识. 在文献[2],对带电粒子在电磁场中运动状态的分析,是针对相互垂直的电磁场这一特殊情况进行的. 随着科学技术的不断发展,对带电粒子在电磁场中的运动问题的探讨也从经典力学的角度上升到了量子力学的角度,文献[5]中,从量子力学角度讨论了带电粒子在电磁场中的运动情况,并利用计算机对粒子取不同能量时的闭合轨道进行了模拟. 在电场和磁场中运动的带电粒子,受到电场的吸引势形式比较简单,可以较容易的求解哈密顿运动微分方程的解. 文中把电场换为电介质表面,利用静电成像方法[7],将电介质表面对电子的吸引势用镜像势来表示,电介质表面的作用类似于电场,但是镜像势代替电场的吸引势后,使哈密顿运动方程的求解遇到困难,在电介质表面作用下的运动方程不再是简单的解析表达式,经过复杂的求导和积分运算后,得到其运动满足某一等式.

1 哈密顿运动方程推导

1.1 哈密顿量

质量为 m,电量为 $-e$ 的电子,以初动能 E,沿与 z 轴成 θ 的角度进入磁场和电介质表面附近,其中磁场 B 沿 z 轴正方向($B = Bk$),如图 1 所示,电子的哈密顿量为[4]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(\hat{p} + \frac{\hat{A}}{c}\right)^2 + V \tag{1}$$

取特殊复合场的矢势 $\vec{A} = Bx\vec{j}$,则电子的哈密顿量用标量形式表示可写成:

$$H = \frac{1}{2}|P|^2 + \frac{B}{2c}(p_y x - p_x y) + \frac{B^2}{8c^2}(x^2 + y^2) + V \tag{2}$$

定义 $\omega_L = \frac{B}{2c}$ 为拉莫尔旋进频率,B 是磁场强度,c 是光速,转化为柱坐标系下可得:

$$H = \frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2}P_z^2 + \omega_L L_z + \frac{1}{2}\omega_L^2\rho^2 + V \tag{3}$$

上式中出现的 V 代表电介质表面对电子的作用. 利用镜像法,如图 1 所示,可以将电介质 + e 的电荷.

表面产生的感应电荷用一个点电荷来代替,这些感应电荷对电子的作用可以等效为处于与该电子关于电介质表面对称的位置的 + e 的电荷对其的作用. 于是电介质表面对电子的作用势可以表示为: $V = -\frac{\alpha e}{4(d+z)}$,在所讨论的问题中,我们采用原子单位制: m = e = 1,则:

$$V = -\frac{\alpha}{4(d+z)} \tag{4}$$

收稿日期: 2014-06-30

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

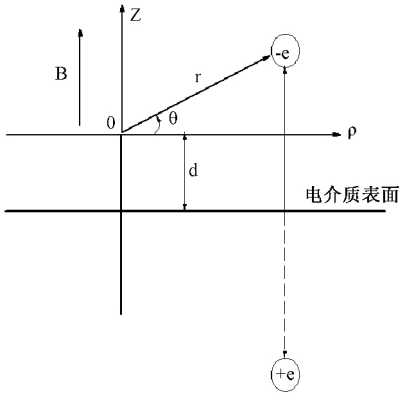


图 1　电子沿与 z 轴成 θ 的角度进入磁场和电介质表面附近，其中磁场 B 沿 z 轴正方向($B = Bk$)，图中将电介质表面的作用等效为处于与该电子关于电介质表面对称的位置.

为使处于坐标原点处的势能为 0，(4) 式添加一个附加量，变为:

$$V = -\frac{\alpha}{4(d+z)} + \frac{\alpha}{4d} \tag{5}$$

将(5) 带入(3) 可得:

$$H = \frac{1}{2}\left(P_\rho^2 + \frac{L_z^2}{\rho^2}\right) + \frac{1}{2}P_z^2 + \omega_L L_z + \frac{1}{2}\omega_l^2\rho^2 - \frac{\alpha}{4(d+z)} + \frac{\alpha}{4d} \tag{6}$$

因为磁场对带电粒子的作用力始终垂直于 z 轴方向，磁场力对带电粒子的力矩为 0，故沿 z 轴方向角动量守恒，L_z 是一个常量，为方便计算，取 $L_z = 0$，于是电子的哈密顿量的最终表达式为:

$$H = \frac{1}{2}(P_\rho^2 + P_z^2) + \frac{1}{2}\omega_l^2\rho^2 - \frac{\alpha}{4(d+z)} + \frac{\alpha}{4d} \tag{7}$$

1.2　哈密顿运动方程推导

利用哈密顿正则方程: $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}$，$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p}$，对(7) 式求导可以得到:

$$\dot{\rho} = \frac{\partial H}{\partial P_\rho} = P_\rho \tag{8}$$

$$\dot{P}_\rho = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\omega_l^2\rho \tag{9}$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z \tag{10}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\alpha}{4(d+z)^2} \tag{11}$$

联立(8) (9) 两式，得二阶常微分方程:

$$\ddot{\rho} + \omega_l^2\rho = 0 \tag{12}$$

解之:

$$\rho(t) = A\sin(\omega_l t) + B\cos(\omega_l t) \tag{13}$$

由初始条件: 当 $t = 0$ 时，$\rho(t) = 0$ 和 $p_\rho(t) = k\sin\theta$(k 为带电粒子进入磁场和金属表面附近的初动量，且 $k = \sqrt{2E}$)

将初始条件带入(10) 可得:

$$\rho(t) = \frac{k}{\omega_l}\sin\theta \mid \sin(\omega_l t) \mid \tag{14}$$

(11) 式即带电粒子沿 ρ 方向的运动方程. 在此方向通过求解二阶常微分方程，可以得到解析解，即 ρ 方向运动的解析表达式. 显然电子沿 ρ 方向的运动是在磁场作用下的圆周运动，运动周期 $t_{ret}^{\rho} = j\pi/\omega_L$，$j = 1, 2\cdots$ 表示周期个数.

联立(10) (11) 式可得微分方程:

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{4(d+z)^2} = 0 \tag{15}$$

$$\ddot{z} = \dot{p}_z = \frac{dp_z}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dp_z}{dz}p_z = -\frac{\alpha}{4(d+z)^2} \tag{16}$$

$$p_z dp_z = -\frac{\alpha}{4(d+z)^2}dz \tag{17}$$

将(14) 两端积分可得:

$$p_z = \sqrt{2E\cos^2\theta + \frac{\alpha}{2(d+z)} - \frac{\alpha}{2d}} \tag{18}$$

再由(10) 式可得:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{2E\cos^2\theta + \frac{\alpha}{2(d+z)} - \frac{\alpha}{2d}} \tag{19}$$

将上式两端积分可得[8]:

$$\frac{2d^2\cos\theta\sqrt{2E} - \sqrt{2d(d+z(t))}\left[4Ed^2\cos^2\theta - (\alpha - 4Ed\cos^2\theta)z(t)\right]}{\alpha - 4Ed\cos^2\theta} + \frac{\alpha\sqrt{2d^3}\left[\arctan\sqrt{\frac{4Ed^2\cos^2\theta - (\alpha - 4Ed\cos^2\theta)z(t)}{(\alpha - 4Ed\cos^2\theta)(d+z(t))}} - \arctan\sqrt{\frac{4Ed\cos^2\theta}{\alpha - 4Ed\cos^2\theta}}\right]}{(\alpha - 4Ed\cos^2\theta)^{3/2}} = t \tag{20}$$

(20) 式即带电粒子沿 z 轴方向的运动方程. 这并不是标准的运动方程解析解，但是可以得到 z 方向运动的时间.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 闭合轨道模拟

2.1 闭合轨道的条件分析

下面给出电子形成闭合轨道条件的定量分析,得出电子从原点出发后,经过一定时间又返回到原点,即形成一条闭合轨道的初始条件.

2.1.1 特殊情况

若电子以一定的初动能沿 z 轴方向进入磁场和金属表面附近,此时电子的速度与磁场方向平行,磁场对电子的作用力为 0,即电子的运动轨迹仅受电介质表面的影响. 此种情况下,电子所受的作用力始终竖直向下. 假设 z 方向电子的初动量为 $k_{z0} = \sqrt{2E}\cos\theta$ 是负值,那么 $z(t) < 0$,电子永远不可能运动返回到原点. 如果初动量是正值,电子出射方向沿 z 轴正方向,由于电介质表面镜像势的吸引作用,电子从原点出发运动一定时间后还可以回到原点,从而形成闭合轨道. 这一条闭合轨道是永远存在的,称为平行轨道[9],用 $j = 0$ 表示,这条轨道的周期为:

$$t_{//} = \frac{4d^2\sqrt{2E}}{1-4Ed} + \frac{2d\sqrt{2d}}{(1-4Ed)^{3/2}}\arctan\sqrt{\frac{4dE}{1-4Ed}} \tag{21}$$

2.1.2 一般情况

若电子以一定的初动能沿与 z 轴成 θ 的角度进入磁场和金属表面附近,此时电子既受磁场力的作用,又受电介质表面的影响,电子沿 z 轴运动的最大距离为

$$z_{\max} = \frac{4Ed^2\cos^2\theta}{\alpha - 4Ed\cos^2\theta} \tag{22}$$

所以沿 z 方向的返回时间:

$$\begin{aligned} t_{ret}^{z} &= 2\int_0^{z_{\max}} \frac{1}{p_z}dz \\ &= \frac{4d^2\sqrt{2E}\cos\theta}{\alpha - 4E\cos^2\theta d} + \frac{\alpha 2d\sqrt{2d}}{(\alpha - 4E\cos^2\theta d)^{3/2}} \times \\ &\quad \arctan\sqrt{\frac{4dE\cos^2\theta}{\alpha - 4E\cos^2\theta d}} \end{aligned} \tag{23}$$

电子从原点出发,当沿 z 方向的返回时间和圆周运动的周期相等即满足 $t_{ret}^{z} = t_{ret}^{\rho}$ 时,就会回到原点从而形成除了 j = 0 的闭合轨道以外的新轨道.

至此,我们得出的电子形成闭合轨道的基本结论有:① 初动量 k_0 在 z 轴的分量 k_{z0} 大于 0;② 初动量 k_0 与 ρ 轴的夹角 θ 的取值范围为 $(0, \pi)$;③ 如果给定电子的总能量 E,我们就可以求出 $k_{z0}, k_{\rho 0}$.

2.2 闭合轨道的数值模拟

如果增加电子的能量,j = 0 的轨道周期就会增大. 当正好等于一个圆周运动周期 $t_c = \pi/\omega_L$ 时,$j = 1$ 闭合轨道出现. 能量继续增大,当返回时间是平行轨道的两倍时,$j = 2$ 的闭合轨道出现. 随着能量的增大,闭合轨道的数目增多,第 j 条闭合轨道的返回时间为平行轨道的 j 倍,因此对于给定的能量,最大闭合轨道数目我们可以对 $t_{//}(E)/t_c$ 取整来确定. 新的闭合轨道出现时对应的能量称为边界能,用 E_b^j 表示. 我们选择 GaAs 电介质,其电介质常数为 $\varepsilon = 13.18$,即 $\alpha = 0.86$[9],电子的能量范围从 0 到 0.096eV,原点到电介质表面的距离 $d = 60$a. u. . 表 1 给出了不同磁场强度下出现边界能的情况.

表 1 不同磁场强度下的边界能

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E_{bj} (B = 2T)	0.095 47								
E_{bj} (B = 3T)	0.094 84	0.095 83							
E_{bj} (B = 6T)	0.093 28	0.094 99	0.095 47	0.095 86					
E_{bj} ($B = 12T$)	0.090 82	0.093 28	0.094 38	0.094 84	0.095 21	0.095 47	0.095 67	0.095 83	0.095 95

为了更形象更直观的了解电子的闭合轨道,我们给出了不同磁场强度下,在给定能量范围内的所有闭合轨道模拟图:

(Ⅰ)当 B = 3T 时,共有三条闭合轨道,分别用 j = 0, j = 1, j = 2 表示,如图 2 所示.

(Ⅱ)当 B = 6T 时共有 5 条闭合轨道,分别用 j = 0, j = 1, j = 2, j = 3, j = 4 表示,如图 3 所示.

(Ⅲ)当 B = 12T 时共有 10 条闭合轨道,分别用 j = 0, j = 1, j = 2, j = 3, j = 4, j = 5, j = 6, j = 7, j = 8, j = 9 表示,如图 4 所示.

很多文章对电磁场中运动粒子的情况进行了讨论. 包括从经典力学角度和量子力学的角度. 但是场和表面附近的情况没有人讨论过,本文,我们把电场换成电介质表面,从量子力学的角度推导了电子的

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

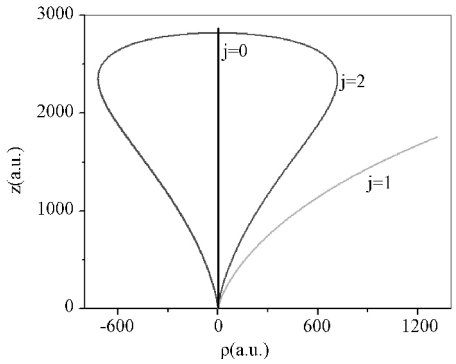


图 2　B = 3T 给定能量范围内的所有闭合轨道图

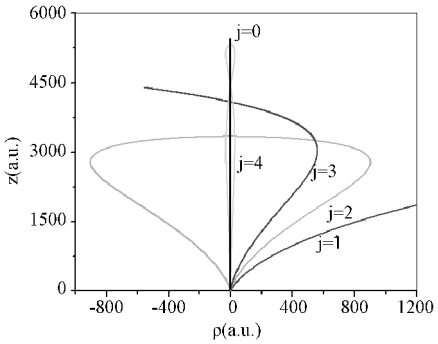


图 3　B = 6T 给定能量范围内的所有闭合轨道图

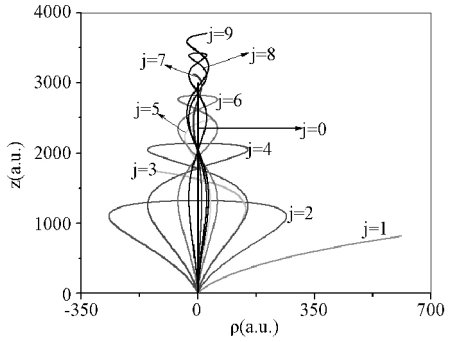


图 4　B = 12T 给定能量范围内的所有闭合轨道图

运动方程,主要分析了粒子形成闭合轨道的条件,并用计算机模拟了部分闭合轨道图像,从中得出随着磁场强度的不断增大,闭合轨道的条数也不断增加的结论. 通过讨论使我们对带电粒子在复合场中的运动问题有了更多的认识,尤其是从量子力学角度的分析,为以后用量子力学讨论带电粒子在更复杂的运动环境下的运动提供参考.

参 考 文 献

[1] 周基升,刘天佑,蒋明娇. 带电粒子在正交电磁场中的运动研究[J]. 湖南广播电视大学学报,2004(1):93 - 94.

[2] 胡建新. 带电粒子在正交恒定电磁场中运动状态的分析[J]. 大学物理,2004,23(4):8 - 10.

[3] D. H. Wang. Photodetachment cross section of H- in electric and magnetic fields with any orientation[J]. Physical Review A,1996,54(5):4078 - 4085.

[4] Liu Z Y, Wang D H. Analyzing the Photodetachment Cross Section of H-in Electric and Magnetic Fields with Arbitrary Orientation[J]. Phys. Rev. A, 1997, 55(6): 4605 - 4608.

[5] Yang G C, Zheng Y Z, Chi X X. Photodetachment of H^- near an Interface[J]. J Phys. B: At. Mol. Opt. Phys, 2006, 39(8): 1855 - 1861.

[6] 王德华,徐志燕,冯攸永. 带电粒子在成任意夹角的电场和磁场中的闭合轨道及其分叉现象研究[J]. 鲁东大学学报,2009, 25(4): 328 - 332.

[7] Zhao H J, Du M L. Photodetachment near a Metal Surface[J]. Phys. Rev. A, 2009, 79: 023408.

[8] Gradshteyn I S, Ryzhik I M. Tables of Integrals, Series and Products[M]. New York: Academic, 1980: 266 - 269.

[9] Wang D H, Huang K Y. Photodetachment of H- near a dielectric surface[J]. Commun. Theo. Phys, 2010, 53(05): 898.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Study on State of Motioned Charged Particles in Magnetic Field near Surface

Tang Tiantian

(Department of Basic Education, Yantai Nanshan University, Yantai 265713)

Abstract

The equation of motioned charged particles in magnetic field near surface is deduced from the point of view of quantum mechanics. To explore the electronic Hamiltonian and more intuitive understanding of motion of charged particles in the magnetic field near the dielectric surface, the analytical solution of the differential equation for special trajectory is simulated with computer.

Key words: Hamiltonian, magnetic field, dielectric surface, numerical simulation.

(上接第 11 页)

[4] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组编 王萼芳,石生明修订. 高等代数(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社,2003.
[5] 凌和良,万冰蓉. 应用型本科院校线性代数教学改革的几点构想 [J]. 赤峰学院学报,2013,29(4):3 -4.
[6] 段勇,黄廷祝. 将数学建模思想融入线性代数课程教学 [J]. 中国大学教学,2009,(3):43 -44.
[7] 许小芳. 数学建模思想融入线性代数教学的探索 [J]. 湖北理工学院学报,2013,29(5):67 -70.
[8] 杨刘. 在《高等代数》课程教学中融入数学建模思想研究 [J]. 教育教学论坛,2013,(13):236 -237.
[9] 王志琦. 探究数学建模思想在数学教学中运用 [J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版),2013,26(6):141 -143.

The Probe on Melting into Mathematical Modeling Thought in Classroom Teaching of Higher Algebra

Zhang Sibao

(Department of Mathematics, Kashgar Teachers College, Kashgar 844008)

Abstract

Higher algebra course is an important professional basic course in Mathematics major, and it is the cornerstone of studing follow courses. It is deadening and pedestrian to lerarn higher algebra course for Mathematics major students, because of lacking of application examples in it. In this paper, the significance and the ways of melting into mathematical modeling thought in classroom teaching of Higher Algebra were described, and to hope it is useful for educational workers.

Key words: higher algebra, mathematical modeling thought, classroom teaching.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net