DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.05.004

自相关阶梯函数的定义及其相关性质

陈奕延[1] 李 晔[2]

(1. 中国人民大学统计学院,北京 100872; 2. 首都师范大学数学科学学院,北京 100048)

摘 要

本文在阶梯函数的基础上,发明出一种新的阶梯函数,从而得到函数的表达式及图像. 该函数称为"自相关阶梯函数". 本文亦介绍了该函数的一些相关性质并用 R 语言绘制了具体案例的示意图.

关键词: 自相关, 阶梯函数, R 语言.

中图分类号: O29

1 自相关函数的定义

自相关阶梯函数是阶梯函数的一种,是函数图像非常形似台阶、楼梯的函数,且函数表达式与函数自变量、因变量相关的阶梯函数. 设函数为 $y = y(x) \in E, E \subset \mathbf{R}$ 是一个集合,则 $\forall (x,y) \in E$,有如下性质: 若 $(x,y) \in E$,则 $(x+y,y) \in E$,然后又有 $(x+y,x+2y) \in E, (2x+3y,x+2y) \in E\cdots\cdots$ 依此类推,对于自变量 x 的初始值 x_0 可以得到函数初始点 (x_0,y_0),将其纵坐标 y_0 的数值加到横坐标 x_0 上构成一个点 (x_0+y_0,y_0),然后再将新的横坐标 x_0+y_0 的数值加到纵坐标 y_0 上又构成一个新的点 (x_0+y_0,x_0+2y_0), $x \in [x_0,+\infty)$,那么按照此方式循环: $(x_0,y_0) \to (x_0+y_0,y_0) \to (x_0+y_0,x_0+2y_0) \to \cdots \to (a_1x_0+b_1y_0,a_2x_0+b_2y_0) \to \cdots$. 自相关阶梯函数按照定义域划分,可以分为有穷自相关阶梯函数和无穷自相关阶梯函数两大类. 这里先分析有穷自相关阶梯函数,写出该函数的表达式,设 $x \in [x_0,x_k]$, $x_0,x_k \in \mathbf{R}$ 且 $k \in \mathbf{Z}^+$,又设 $f(x) = y(x)$,则:

$$f(x) = \begin{cases} y_0, & x_0 \leqslant x < x_0+y_0 \\ x_0+2y_0, & x_0+y_0 \leqslant x < 2x_0+3y_0 \\ \vdots & \\ a_kx_0+b_ky_0, & a_{k-1}x_0+b_{k-1}y_0 \leqslant x < x_k \end{cases},$$

其中 $a_kx_0+b_ky_0 = f(x_k) = y_k$. $a_{k-1},a_k,b_{k-1},b_k \in \mathbf{Z}$, $x_k < (a_{k-1}+a_k)x_0 + (b_{k-1}+b_k)y_0$,也可以画出该函数的图,用 R 语言编写的函数程序包 selfcor. R 如下:

```
selfcor < - function(n,a){
####给出迭代次数和函数初值
A < - matrix(c(a,rep(0,2* n - 2)),n,2,byrow = T)
for(i in 1:(n - 1)){
b < - A[,1] + A[,2]
if((-1)^i = = -1)
A[i+1,] < - c(b,A[,2])
else
A[i+1,] < - c(A[,1],b)
}
x < - A[,1]; y < - A[,2]
plot(x,y,type = "s")
}
n = 10; a = c(2,3) ###函数初值为(2,3)
source("selfcor. R")
selfcor(n,a)
```

调用此程序包可以画出图像(见图 1 一个自相关阶梯函数图像的例子).

如果是 $x \in [x_0,+\infty)$, $x_0 \in \mathbf{R}$,又设 $f(x) = y(x)$,则函数的表达式为:

收稿日期: 2015-09-14

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

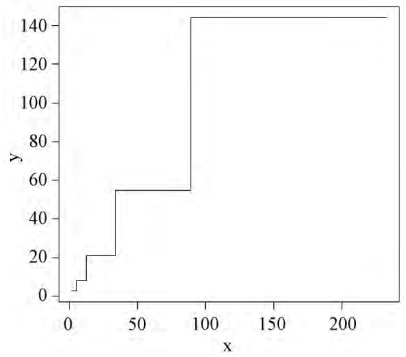


图 1　一个自相关阶梯函数图像的例子

$$f(x)=\begin{cases} y_0, & x_0\leqslant x<x_0+y_0 \\ x_0+2y_0, & x_0+y_0\leqslant x<2x_0+3y_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_2x_0+b_2y_0, & a_1x_0+b_1y_0\leqslant x<(a_1+a_2)x_0+(b_1+b_2)y_0 \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{Z}$. 另外,若 $x\in(-\infty,x_k]$, $x_k\in\mathbf{R}$ 且 $k\in\mathbf{Z}^+$. 则函数的表达式为:

$$f(x)=\begin{cases} \vdots & \vdots \\ a_2x_0+b_2y_0, & a_1x_0+b_1y_0\leqslant x<(a_1+a_2)x_0+(b_1+b_2)y_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_kx_0+b_ky_0, & a_{k-1}x_0+b_{k-1}y_0\leqslant x\leqslant x_k \end{cases},$$

其中 $a_1,a_2,b_1,b_2,a_{k-1},a_k,b_{k-1},b_k\in\mathbf{Z}$, $x_k<(a_{k-1}+a_k)x_0+(b_{k-1}+b_k)y_0$.

对于 $x\in(-\infty,+\infty)$, 则相应的表达式为:

$$f(x)=\begin{cases} \vdots & \vdots \\ a_2x_0+b_2y_0, & a_1x_0+b_1y_0\leqslant x<(a_1+a_2)x_0+(b_1+b_2)y_0 \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{Z}$. 注意,以上均是初始点纵坐标 $y_0\neq 0$ 时候的情况.

最后,对于特殊情况,也就是初始点 (x_0,y_0) 中 $y_0=0$ 的时候,由于第一步的状态是 $(x_0,y_0)\rightarrow(x_0+y_0,y_0)$, 当 $y_0=0$ 时这两个点相等,所以不能让自变量 x 从一个空心点(间断点) 到一个实心点(连续点),且两个点数值相等. 所以必须改变函数的表达式,若 (x_0,y_0) 为函数 $f(x)$ 的初始点, $y_0=0$ 且 $x_0\neq 0$, $x\in[x_0,+\infty)$, 则函数的表达式将变为:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=x_0 \\ x_0, & x_0<x\leqslant 2x_0 \\ \vdots & \vdots \\ a_2x_0, & a_1x<x\leqslant(a_1+a_2)x_0 \\ \vdots & \vdots \end{cases},$$

其中 $a_1,a_2\in\mathbf{Z}$, 若 $x\in(-\infty,+\infty)$, 则其表达式变为:

$$f(x)=\begin{cases} \vdots & \vdots \\ a_2x_0, & a_1x_0<x\leqslant(a_1+a_2)x_0, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

其中 $a_1,a_2\in\mathbf{Z}$.

虽然由于 $x\in(-\infty,+\infty)$,无法找到初始点,但是可以认为此时 $x_0\rightarrow-\infty$,故表达式和 $x\in[x_0,+\infty)$ 时一致. 所以由此可看出 $y_0\neq 0$ 与 $y_0=0$ 时表达式的区别主要在于定义域各段区间上等号的位置. 若初始点 $x_0=y_0=0$,则函数表达式为 $f(x)=0$, $x=0$.

可以知道无穷阶梯函数存在无限可列个跳跃间断点. 前述内容中列出了相应的表达式,则可以研究一下该函数的性质,通过研究定义域、值域、有界性、单调性、特殊性等进行研究.

2　自相关阶梯函数的相关性质

对于定义域,可知 $x\in(-\infty,+\infty)$ 是可取的,或者在区间 $(-\infty,+\infty)$ 范围内的域都可以作为 x 的定义域; 对于值域 y,由于 y 是关于自变量 x 以及其自身的取值所线性表示的值,所以 $y\in(-\infty,+\infty)$ 也是没问题的,或者在区间 $(-\infty,+\infty)$ 范围内的域都可以作为 y 的值域. 若 $x_0=y_0=0$,则 x 只能取 0.

关于有界性的问题需要分类讨论,若定义域是有界的,则相应的函数值也是有界的(即该自相关函数为有界函数); 否则,相应的函数值无界. 这一点可由自相关函数的定义得到. 所以具体情况要看 x 的取值范围,若 $\exists\inf x$,则同样 $\exists\inf y$,若 $\exists\sup x$,则同样 $\exists\sup y$.

可以由图形看出,自相关阶梯函数存在“单调递增性”或“单调递减性”. 每一级“阶梯”都是不断上升,或者不断下降的,但是不具备严格单调性.

由于函数每一段的自变量、因变量的取值范围都是由某个初始点 (x_0,y_0) 的坐标循环相加所得,所以对于 y_0,若 $y_0<0$,则最后得到的图形是向 Y 轴负方向不断趋近下降的,故而称此时的函数为“下

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

自相关阶梯函数";若 $x_0 \neq 0$ 且 $y_0 \geqslant 0$,则最后得到的图象是向 Y 轴正方向不断趋近上升的,故此时的函数为"上自相关阶梯函数";若 $x_0 = y_0 = 0$,则图像变成一个点,称之为"点自相关阶梯函数".

3 结 论

自相关阶梯函数是给定了横、纵坐标的初值,也就是相应的初始点,就可以根据相应的对应法则求出剩余所有点的横纵坐标的离散型函数. 本文介绍了自相关阶梯函数的定义及性质,了解自相关阶梯函数及其性质有助于今后将其运用于日常生活及专业相关领域中,为今后的研究实践提供相应的理论基础.

参 考 文 献

[1] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第一卷)[M]. 北京: 高等教育版社,2006: 118 - 125.

[2] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第二卷)[M]. 北京: 高等教育版社,2006: 211 - 216.

[3] 卓里奇 B A. 数学分析(第一卷)[M]. 北京: 高等教育版社,2006: 133 - 140.

[4] 施利亚耶夫 A H. 随机金融数学基础(第一卷)[M]. 北京: 高等教育版社,2013: 76 - 104.

[5] 隋允康,宣东海,叶红玲,等. 阶跃函数高精度逼近的结构拓扑优化方法[J]. 计算力学学报,2010,27(6): 959 - 967.

[6] 汤志浩. 单位阶梯函数的性质及其应用[J]. 湖南工程学院学报(自然科学版),2009,19(4): 78 - 79.

Definition and Properties of Self-Correlated Step Function

Chen Yiyan[1] Li Ye[2]

(1. Department of Statistic, Renmin University, Beijing 100872;
2. School of Mathematical Sciences, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

Based on the step function, a kind of new step function is invented and named 'self-correlated step function'. This paper introduces some function property to draw the sketch map of particular function from R language.

Key words: self-correlated step function, discontinuity points, R language.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net