DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.04.008

首都师范大学学报(自然科学版)
第36卷 第4期 Journal of Capital Normal University No. 4
2015年8月 (Natural Science Edition) August, 2015

自行车转弯问题的研究

张婷玉[1] 陈清梅[2] 邢红军[1]

(1. 首都师范大学 物理系,北京 100048; 2. 北京中医药大学 基础部,北京 100102)

摘 要

自行车转弯问题是一个典型的原始物理问题. 文章分析关于该过程的一个较精细模型,并计算转弯倾角,所得结果在考虑实物尺寸量级之后与传统的直杆模型结果相差很小. 此类原始物理问题可以更好地训练学生思维能力,对大学物理教学具有重要的启示作用.

关键词: 原始物理问题,自行车转弯,直杆模型,力矩平衡.

中图分类号: G640

如何在大学物理教学中培养学生的实践能力和创新精神,一直以来都是大学物理教学的热门话题,而原始物理问题的引入就为大学物理教学的创新提供了一个新思路. 比如: 人骑自行车转弯的时候需要倾斜一定的角度,问角度为多大时才能使人既能转过弯又不倾倒? 本问题从生活中的物理现象出发,是一道典型的原始物理问题. 将原汁原味的物理问题展现到学生面前,体现了大学物理教学的生态化,本文对此进行深入研究.

1 自行车转弯的一个精确模型

为解决这个问题,我们应用大学力学的相关知识进行理论推导. 首先设置相关物理量: 设自行车拐弯的角速度为 Ω,自行车转弯半径为 R,车轮半径为 r,车轮转动惯量为 I,自行车行进线速度为 v,自行车的质量为 m,人车总质量为 M,人车直立时质心到地面的距离为 L.

选某一瞬间车轮着地点为参考原点 O(此点固定),车轮圆心 R(随车而动),人车总质心 C(随车而动),如图 1 所示。

自行车运动过程中车轮质心随车而动,整个过程总角动量分两部分:

$$\vec{L}_{总}=\sum_{所有部分} m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i=\sum_{车轮} m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i+\sum_{其它部分} m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i=\vec{L}_{车轮}+\vec{L}_{其它部分}$$

收稿日期: 2014-06-24

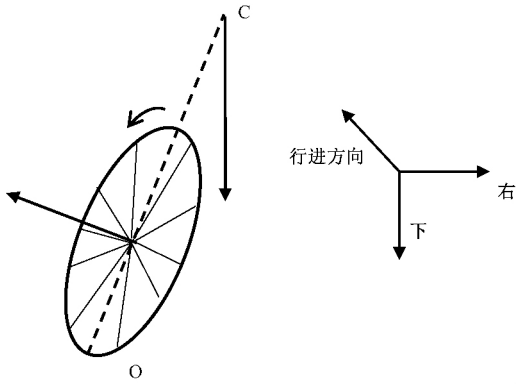


图 1

自行车转弯角速度 Ω 非常小,以至于自行车转弯所绕圆周的线度 $\frac{v}{\Omega}$ 远大于人车的线度($\sim|\vec{r}_i|$),这在典型的转弯过程中均得到满足,在这样的条件下,转弯给各质点带来的线速度($\sim\Omega|\vec{r}_i|$),远小于平动速度和车轮转动带来的速度,所以,在算总角动量大小的时候,可以认为转弯角速度 Ω 为零

$$\vec{L}_{总}=\vec{L}_{车轮自转}+\vec{L}_{其它部分平动}=\vec{L}_{车轮自转}+\vec{L}_{人车平动}$$

$$\vec{L}_{总}=\vec{L}_s+M\cdot\overrightarrow{OC}\times\vec{v}_c\ (\text{其中记}\ \vec{L}_{车轮自转}=\vec{L}_s)$$

人车角动量的变化率

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{总}=\frac{d}{dt}\vec{L}_s+M\cdot\vec{v}_c\times\vec{v}_c+M\cdot\overrightarrow{OC}\times\frac{d}{dt}\vec{v}_c$$

$$=\vec{\Omega}\times\vec{L}_s+M\cdot\overrightarrow{OC}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}_c)$$

(注意这里两项同一量级,Ω 已不可忽略)

由于选择了 O 为参考点,故对角动量变化有贡

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

献的只有重力的力距,所以

$$\overrightarrow{OC}\times(\vec{M}\vec{g}) = \frac{d}{dt}\vec{L}_{总} = \vec{\Omega}\times\vec{L}_s + M\cdot\overrightarrow{OC}\times(\vec{\Omega}\times\vec{v}_c)$$

继而进行方向判断. 如图,假设车子向右转弯(不失一般性),此时 $\vec{\Omega}$ 垂直地面向下,$\vec{L}_s$ 垂直车轮面向左,$|\vec{L}_s| = I\cdot\omega = I\cdot\frac{v}{r}$,$\vec{\Omega}\times\vec{L}_s$ 指向车子行进方向,大小为 $|\vec{L}_s|\cdot\Omega\cdot\cos\theta$; $\vec{\Omega}\times\vec{v}_c$ 平行于地面指向右,大小为 Ωv. 等式右边的两项均垂直于右方向,故要求 $\overrightarrow{OC}\times(\vec{M}\vec{g})$ 也应垂直于右方向,而 $\overrightarrow{OC}\times(\vec{M}\vec{g})$ 又垂直于竖直方向($\vec{g}$),由此可得等式左右均是沿车子行进方向,即: $\overrightarrow{OC}$必须垂直于行进方向. $\overrightarrow{OC}$满足此条件后,该矢量方程左右均平行于行进方向,故经计算化为数量等式

$$M\cdot g\cdot L\cdot\sin\theta = I\cdot\frac{v}{r}\cdot\Omega\cdot\cos\theta + M\cdot\cdot L\cdot\Omega\cdot v\cdot\cos\theta$$

即 $\tan\theta = \frac{\Omega\cdot v}{g}\left(1+\frac{I}{M\cdot r\cdot L}\right)$

其中 $\Omega = \frac{v}{R}$,自行车绕中间轴的转动惯量近似为 $I = mr^2$

即 $\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}\left(1+\frac{mr}{M\cdot L}\right)$

显然,当自行车转弯的倾斜角为 $\theta = \arctan\left[\frac{v^2}{Rg}\left(1+\frac{mr}{ML}\right)\right]$ 时,骑车人既能转弯又不倾倒.

2　自行车转弯的一个简化模型

事实上,对于人骑自行车转弯,还可以建立一个简化的物理模型,即将自行车和人抽象为直杆. 假设地面对直杆的支持力为 N,直杆所受摩擦力为 f,直杆的质量为 M,直杆运动速度为 v,直杆质心到地面的距离为 L,转弯半径为 R,直杆的倾斜角为 θ,如 2 图所示.

在竖直方向上,由二力平衡可得,$N = Mg$; 在水平方向,摩擦力充当向心力可得,$f = \frac{Mv^2}{R}$; 由于力矩参考点可以任意选取[1],以重心为转动轴,由力矩

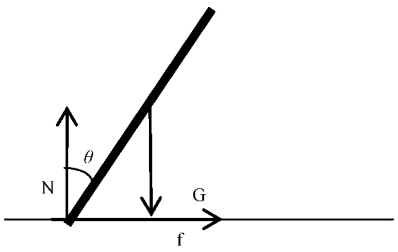


图 2

平衡原理可知,摩擦力与支持力对质心的合力矩为零,$NL\sin\theta = fL\cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{f}{N} = \frac{Mv^2}{R}/Mg = \frac{v^2}{gR}$$

显然,当自行车转弯的倾斜角为 $\theta = \arctan\frac{v^2}{gR}$ 时,骑车人既能安全转弯又不倾倒.

将精确模型与简化模型对比,不难发现两者是一致的. 由精确模型结果可知,自行车转弯满足的倾斜角为 $\theta = \arctan\left[\frac{v^2}{Rg}\left(1+\frac{mr}{ML}\right)\right]$,其中车轮的半径 r 小于自行车转弯半径 R,两者大小为同一数量级. 一般自行车重 22.5 kg,车轮质量大约为 4 kg,假设人的质量为 60 kg,人车总质量大约为 82.5 kg,因此,$mr \ll ML$,则括号内的第二项可以忽略,也就是说车轮的转动对自行车转弯倾角并不起很大的影响,所以还近似得到 $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$,即为简化物理模型的结果.

虽然车轮的转动对自行车倾角没有很大影响,但有很重要的动力学效应. 行进中的自行车比起静止的自行车更不易倾倒是众所周知的现象,这便是车轮转动所带来的动力学效应,类似于旋转的陀螺不会倒. 由于该问题与我们所讨论的问题关系不大,在此不再过多讨论.

由以上研究可知,在解决原始物理问题时,需要首先用直觉思维进行思考,然后用抽象思维建立物理模型,在此基础上进行物理量的设置与物理方法的选取,选择所运用的物理规律,最后使用数学工具,进行严密的推理. 显然,原始物理问题对学生思维的训练就远非习题可比拟. 因此,原始物理问题的引入对于大学物理教学具有启示作用.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] 赵凯华,罗蔚茵. 力学(第二版)[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

Analysis on the Bike Turning Problem

Zhang Tingyu[1] Chen Qingmei[2] Xing Hongjun[1]

(1. Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048;
2. Department of Basic, Beijing University of Chinese Medicine, Beijing 100102)

Abstract

The bike turning problem is a typical original physics problem. We analyze a more precise model of this problem and calculate the tilt angle, the result we get, after taking consideration the actual sizes of the object, has merely a small deviation from the conventional ad-hoc model of straight-pole. Original physics problems like this can be beneficial to the students' thinking ability, and has important implicative effect on college physics teaching.

Key words: Original Physics Problem, Bike Turning, Straight-pole Model, Torque Balance.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net