DOI:10.19789/j.1004-9398.2022.04.002
文献引用:汪成咏,王序岩. Riesz表现定理的向量值形式[J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2022,43(4):8-14. WANG C Y,WANG X Y. Vector-valued form of Riesz's representation theorem[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition),2022,43(4):8-14.

Riesz表现定理的向量值形式

汪成咏，王序岩*

（北京交通大学数学系，北京　100044）

摘要:为了刻画低维向量值函数空间上乘子的特征,导出了从$C_0(\Omega,H)$到H、从$C_0(\Omega,H)$到C、从$C_0(\Omega)$到H的有界线性算子的表现定理,把闭区间上的连续函数空间上的有界线性泛函的Riesz表现定理推广到局部紧的Hausdorff空间上,得到定义域是Hausdorff空间.值域是Banach空间的向量值积分的Riesz表现定理.文中的Ω表示局部紧的Hausdorff空间.

关键词:有界线性算子;Hausdorff空间;Riesz表现定理;向量测度
中图分类号:O177.1;O177.2

Vector-valued form of Riesz's representation theorem

WANG Chengyong，WANG Xuyan*

（Department of Mathematics，Beijing Jiaotong University，Beijing　100044）

Abstract: In order to characterize the multiplier in the space of low-dimensional vector-valued functions, this paper derive the expression theorems of bounded operators from $C_0(\Omega,H)$ to H, from $C_0(\Omega,H)$ to C, and from$C_0(\Omega)$ to H. This paper extend the Riesz representation theorem of bounded functional on continuous function spaces over closed intervals to locally compact Hausdorff spaces, and obtain the Riesz representation theorem of vector-valued integrals over Banach spaces whose domain is Hausdorff space and range is Banach space. The Ω in this article represents a locally compact Hausdorff space.

Keywords: bounded linear operator; Hausdorff space; Riesz representation theorem; vector measure
CLC: O177.1; O177.2

0　引　言

向量值函数积分,是普通(数值的)函数积分在向量值函数空间上的推广[1].在分析数学的各个不同分支中[2],由于核函数在不同领域的要求不同,所以需要引入向量值函数或向量值测度的积分[3].在研究低维向量值函数空间上的有界线性算子的过程中,需要将广义泛函中的Riesz表现定理推广到向量值函数空间[4],这便是本文的研究意义.

本文先考虑C_0与希尔伯特空间之间的有界线性算子的表现定理[5],把闭区间上的连续函数空间上的有界线性泛函的Riesz表现定理推广到局部紧的Hausdorff空间上[6],最终得到定义域是Hausdorff空间、值域是Banach空间的向量值积分的Riesz表现定理.

1　主体内容

设Ω是局部紧的Hausdorff空间,$\mathcal{H}$是一可分

收稿日期:2021-05-07
*通信作者:wangxuyan.1996@163.com

Hilbert空间,$f \in C_0(\Omega) \Leftrightarrow f$在$\Omega$上连续的实值或复值函数,且对$\varepsilon > 0$,存在$X$的紧子集$K$,当$x \in \Omega - K = K^c$时,$|f(x)| < \varepsilon$.令

$$\|f\|_c = \max_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

则$C_0(\Omega)$是一个可分的Banach空间.设T是由$C_0(\Omega)$到$\mathcal{H}$的有界线性算子,下面考虑T的构造.对于任意的$\varphi \in H$,则$(T(f), \varphi)$就是$C_0(\Omega)$上的有界线性泛函[7],由Riesz表现定理,存在X上唯一的正则Borel测度σ_φ使得

$$(T(f), \varphi) = \int_\Omega f(x) \mathrm{d}\sigma_\varphi(x),$$

且σ_φ的全变差测度

$$|\sigma_\varphi|(\Omega) = \sup_{\|f\|_c \leqslant 1} |(T(f), \varphi)| \leqslant \|T\| \|\varphi\|,$$

由于$(T(f), \varphi)$是连续的双线性泛函[8],于是

$$\sigma_{\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2} = \lambda_1\sigma_{\varphi_1} + \lambda_2\sigma_{\varphi_2},$$

于是对于Ω任意的Borel子集E,

$$F(\varphi) = \sigma_\varphi(E)$$

是$\mathcal{H}$上的线性泛函,且由于

$$|\sigma_\varphi(E)| \leqslant |\sigma_\varphi|(X) \leqslant \|T\| \|\varphi\|,$$

从而由Riesz表现定理,存在$\sigma(E) \in \mathcal{H}$,使得

$$\sigma_\varphi(E) = (\sigma(E), \varphi),$$

至此可知σ是弱可数可加的向量值测度[9],由Pettis定理[10],σ是可数可加的向量值测度,其半变差测度$\|\sigma\|(X) = \|T\|$[11].且

$$T(f) = \int_\Omega f(x) \mathrm{d}\sigma(x),$$

因

$$\|\sigma\|(\Omega) = \sup\{|(\sigma, \varphi)|(\Omega): \varphi \in H, \|\varphi\| \leqslant 1\},$$

其中$|(\sigma, \varphi)|$是标量测度$(\sigma, \varphi)(E) = (\sigma(E), \varphi)$,$E \in \mathcal{B}(\Omega)$的变差测度.由于$(\sigma, \varphi)(E) = (\sigma(E), \varphi) = \sigma_\varphi(E)$,$E \in \mathcal{B}(X)$,故

$$|(\sigma, \varphi)|(\Omega) = |\sigma_\varphi|(\Omega) = \sup_{\|f\|_c \leqslant 1} |(T(f), \varphi)|,$$

所以σ的总半变差

$$\|\sigma\|(\Omega) = \sup_{\|f\|_c \leqslant 1, \|\varphi\| \leqslant 1} |(T(f), \varphi)| = \|T\|.$$

则可以得到如下定理.

定理1 设T是从$C_0(\Omega)$到可分Hilbert空间$\mathcal{H}$的有界线性算子,则在$(\Omega, B(\Omega))$上存在唯一$\mathcal{H}$值有界半变差可数空间测度σ,使得对于任意$f \in C_0(\Omega)$都有

$$T(f) = \int_\Omega f(x) \mathrm{d}\sigma(x),$$

且

$$\|T\| = \|\sigma\|(\Omega),$$

因此,$\mathcal{B}(C_0(\Omega), H)$与$(\Omega, B(\Omega))$上$\mathcal{H}$值有界半变差测度的空间等距同构.

目前不能得到σ是有界变差测度的结论,更不能得到σ的总变差$|\sigma|(X) = \|T\|$.这里给一个例子予以说明:

例1 设Ω是任意的无限点集,特别Ω是由无限点集构成的局部紧Hausdorff空间,$\{x_n: n \geqslant 1\} \subset \Omega$是$\Omega$的可列子集,取Hilbert空间$\mathcal{H}$的规范正交基$\{e_n: n \geqslant 1\}$,对于$\Omega$上的$\sigma$-代数$\mathcal{F}$,$\forall E \in F$,令

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(x_n) e_n,$$

则μ是(Ω, F)上强可数可加的$\mathcal{H}$-值向量测度,其为半变差有界而非变差有界者,且总的半变差测度为

$$\|\mu\|(\Omega) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

例2 考虑$x_0 \in \Omega$,考虑测度

$$\mu(E) = \chi_E(x_0),$$

于是

$$\mu^* \chi_E(x) = \int_\Omega \chi_E(x - y) \mathrm{d}\mu(y) = \chi_E(x - x_0),$$

在$\mathbf{R} = \mathbf{R}^1 = (-\infty, +\infty)$,考虑

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_E(n) e_n,$$

则对于$E = (0, 1) \subset \mathbf{R}$,则

$$\mu^* \chi_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{(n+1, n+2)}(x) e_n,$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mu^* \chi_E(x)\|_{\mathcal{H}} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \chi_{(n+1, n+2)}(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

对于从Ω到$\mathcal{H}$的$\mathcal{B}(\Omega)$可测的简单函数$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x)$,其中$a_k \in \mathcal{H}$,$\{E_k: 1 \leqslant k \leqslant m\}$是$m$个互不相交的Borel可测集,定义$\varphi(x)$关于$\sigma$的数值积分为

$$\int_\Omega (\varphi(x), \mathrm{d}\sigma(x)) = \sum_{k=1}^{m} (a_k, \sigma(E_k)).$$

如果σ是有界变差的可数可加$\mathcal{H}$-值向量测

度,则

$$\left|\int_{\Omega}\left(\varphi(x),\mathrm{d}\sigma(x)\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left\|a_k\right\|_{\mathcal{H}}\left\|\sigma\left(E_k\right)\right\|_{\mathcal{H}}$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{\sup}\sum_{k=1}^{m}\left\|\sigma\left(E_k\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|\varphi\|_{\sup}|\sigma|(\Omega),$$

其中

$$\|\varphi\|_{\sup}=\sup_{x\in\Omega}\|\varphi(x)\|_{\mathcal{H}}.$$

记$S\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$为从$\Omega$到$\mathcal{H}$的$\mathcal{B}(\Omega)$可测的简单函数所形成的空间,按$\|\varphi\|_{\sup}$,$S\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$是赋范线性空间.于是积分$\int_{\Omega}\left(\varphi(x),\mathrm{d}\sigma(x)\right)$定义了$S\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$上的有界线性泛函$F$,其范数$\|F\|\leqslant|\sigma|(\Omega)$.选择与$\sigma\left(E_k\right)$同向的单位向量$a_k=\dfrac{\sigma\left(E_k\right)}{\left\|\sigma\left(E_k\right)\right\|}(1\leqslant k\leqslant m)$,则

$$\int_{\Omega}\left(\varphi(x),\mathrm{d}\sigma(x)\right)=\sum_{k=1}^{m}\left\|\sigma\left(E_k\right)\right\|_{\mathcal{H}}\leqslant\|F\|,$$

当$\left\{E_k:1\leqslant k\leqslant m\right\}$取遍$\Omega$的有限$\mathcal{B}(\Omega)$可测划分时,取上确界得$|\sigma|(\Omega)\leqslant\|F\|$.于是

$$\|F\|=|\sigma|(\Omega).$$

在Ω上有界$\mathcal{H}$值函数按$\|\varphi\|_{\sup}$所形成的Banach空间内,$S\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$的闭包[12],记为$B\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$,则$F$可以唯一的延拓成$B\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$上的有界线性泛函.对于任意$\varphi\in B\left((\Omega,\mathcal{B}(\Omega)),H\right)$,称$F(\varphi)$为$\varphi$关于$\sigma$的积分,记为

$$F(\varphi)=\int_{\Omega}\left(\varphi(x),\mathrm{d}\sigma(x)\right),$$

且

$$\|F\|=|\sigma|(\Omega).$$

引理1 (Lusin定理) 设Ω是局部紧的Hausdorff空间,$\mathcal{A}$是Ω上的σ-代数且$\mathcal{A}\supset\mathcal{B}(\Omega)$,设$\mu$是$(\Omega,A)$上的正则测度,$f:\Omega\to\mathbf{R}$是$\mathcal{A}$可测函数.如果$A\in\mathcal{A}$且$\mu(A)<+\infty$,对$\forall\varepsilon>0$,则存在$A$的紧子集$K$,使得$\mu(A-K)<\varepsilon$且$f$在$K$上的限制是连续函数.此外,存在$\Omega$上紧支撑的连续函数$g$在$K$上处处与$f$相等;如果$A\neq\varnothing$,则$g$可选择使得

$$\sup\left\{\left|g(x)\right|:x\in\Omega\right\}\leqslant\sup\left\{\left|f(x)\right|:x\in A\right\}.$$

引理2 (Dini定理) 设Ω是一紧致Hausdorff空间,若$f_n\in C(\Omega,\mathbf{R})$满足$f_n(t)\leqslant f_{n+1}(t)(n\geqslant1,t\in\Omega)$,且设$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)(t\in\Omega)$,$f\in C(\Omega,\mathbf{R})$,则$\{f_n\}$在$\Omega$上一致收敛于$f$.

证 由于紧致Hausdorff空间可以度量化,于是假设d是与Ω的拓扑相容的度量.记

$$E_n=\max_{t\in\Omega}\left[f(t)-f_n(t)\right]\geqslant0,\ (n\geqslant1),$$

则由Dini定理的假定有

$$E_n\geqslant E_{n+1},\ \ (n\geqslant1),$$

由最大最小值定理,存在$t_n\in\Omega$,使得

$$E_n=f\left(t_n\right)-f_n\left(t_n\right),$$

由Ω是一紧致Hausdorff空间的假定,存在$\{t_n\}$的子列$\left\{t_{n_k}\right\}$及t_0使得$\lim\limits_{k\to\infty}t_{n_k}=t_0$.为了表述的方便,不妨假设$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t_0$,否则考虑子列$\left\{f_{n_k}\right\}$即可.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(t_0\right)=f\left(t_0\right)$,对于$\forall\varepsilon>0$,存在$N_0>0$,使得

$$0\leqslant f\left(t_0\right)-f_{N_0}\left(t_0\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

由于$f(t)-f_{N_0}(t)$为连续函数,于是存在$\delta>0$使得当$t\in\Omega$且$d\left(t,t_0\right)<\delta$时,有

$$\left|\left(f(t)-f_{N_0}(t)\right)-\left(f\left(t_0\right)-f_{N_0}\left(t_0\right)\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而当$t\in\Omega$且$d\left(t,t_0\right)<\delta$时,有

$$0\leqslant f(t)-f_{N_0}(t)<\varepsilon,$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t_0$,存在$N>N_0$,当$n>N$时有$d\left(t_n,t_0\right)<\delta$,从而

$$E_n=f\left(t_n\right)-f_n\left(t_n\right)\leqslant f\left(t_n\right)-f_{N_0}\left(t_n\right)<\varepsilon,$$

于是,证得$\{f_n\}$在Ω上一致收敛于f的结论.

下面考虑$C_0(\Omega,H)$,其中$f\in C_0(\Omega,H)$当且仅当f是Ω到$\mathcal{H}$的连续映射,且对$\varepsilon>0$,存在X的紧子集K,当$x\in\Omega-K=K^c$时,$\left\|f(x)\right\|<\varepsilon$.令

$$\left\|f\right\|_{C_0(\Omega,\mathcal{H})}=\max_{x\in\Omega}\left\|f(x)\right\|,$$

则$C_0(\Omega,\mathcal{H})$是一个可分的Banach空间.设F是$C_0(\Omega,\mathcal{H})$上的一个连续线性泛函,则对任意的$x\in H$,$f(t)\in C_0(\Omega)$,令

$$F_x(f)=F\left(f(t)x\right),$$

则因$f(t)x\in C_0(\Omega,\mathcal{H})$,且

$$\left\|f(t)x\right\|_{C_0(\Omega,\mathcal{H})}=\left\|f\right\|_c\|x\|_{\mathcal{H}},$$

于是

$$\left|F_x(f)\right|\leqslant\|F\|\left\|f\right\|_c\|x\|_{\mathcal{H}},$$

F_x是$C_0(\Omega)$上的有界线性泛函,

$$\left\|F_x\right\| \leqslant \|F\|\|x\|_{\mathscr{H}}.$$

由Riesz表现定理,存在Ω上唯一正则标量值的Borel测度σ_x使得

$$F_x(f) = F(f(t)x) = \int_{\Omega} f(x)\,\mathrm{d}\sigma_x(x),$$

且

$$\left|\sigma_x\right|(\Omega) = \left\|F_x\right\| \leqslant \|F\|\|x\|_{\mathscr{H}}.$$

于是与前一部分的讨论一样,存在Ω上可数可加的$\mathscr{H}$值向量测度σ,使得对于Ω的任意Borel可测子集E,有

$$\sigma_x(E) = (x, \sigma(E)),\ \ x \in H,$$

于是

$$\int_{\Omega} f(t)\,\mathrm{d}\sigma_x(t) = \int_{\Omega} f(t)(x, \mathrm{d}\sigma(t)).$$

取$\mathscr{H}$的标准正交基$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$,对于Ω的任意Borel可测子集E,令

$$\mu_n(E) = (\sigma(E), e_n),$$

则μ_n是Ω上的有限正则Borel标量测度,使得

$$\sigma(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(E)e_n,$$

考虑部分和

$$\sigma_n(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(E)e_k,$$

则σ_n是$\mathscr{H}$值的有界变差可数可加的向量测度,变差测度$\left|\sigma_n\right|: B(\Omega) \to [0, +\infty)$是正则可数可加测度,其中$\mathscr{B}(\Omega)$是$\Omega$的Borel σ-域.且对任意$E \in B(\Omega)$

$$\left|\sigma_n\right|(E) \leqslant \left|\sigma_{n+1}\right|(E),$$

对于任意的$f \in C_0(\Omega, H)$,考虑

$$\mathscr{P}_n(f(t)) = \sum_{j=1}^{n} (f(t), e_j)e_j,$$

此处$\mathscr{P}_n$是$\mathscr{H}$到$\mathrm{span}\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$的正交投影算子,则$P_n(f(t)) \in C_0(\Omega, H)$,且

$$F(\mathscr{P}_n(f(t))) = \int_{\Omega} (\mathscr{P}_n(f(t)), \mathrm{d}\sigma_n(t)) =$$

$$\int_{\Omega} (f(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)),$$

对于$\forall \varphi \in S((\Omega, \mathscr{B}(\Omega)), H)$,表$\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}$,其中$a_j \in \mathscr{H}, E_j \in \mathscr{B}(\Omega), E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant m)$.则由于$\left|\sigma_n\right|$是正则可数可加测度,于是存在$E_j$的紧子集$K_{j,v}$使得

$$\left|\sigma_n\right|(E_j - K_{j,v}) < \frac{1}{2mv\left(1 + \|\varphi\|_{\sup}\right)},\ \ (1 \leqslant j \leqslant m, v \geqslant 1),$$

由于紧集$\{K_{j,v}\}_{j=1}^{m}$两两互不相交,而Ω是局部紧的Hausdorff空间,及$\left|\sigma_n\right|$是正则可数可加测度,从而存在互不相交的开集$\{G_{j,v}\}_{j=1}^{m}$使得$K_{j,v} \subset G_{j,v} (1 \leqslant j \leqslant m)$且$G_{j,v}$的闭包是紧集

$$\left|\sigma_n\right|(G_{j,v} - K_{j,v}) < \frac{1}{2mv\left(1 + \|\varphi\|_{\sup}\right)},\ \ (1 \leqslant j \leqslant m, v \geqslant 1),$$

存在Ω上的连续函数$0 \leqslant \phi_{j,v} \leqslant 1$,使得当$t \in K_{j,v}$时$\phi_{j,v}(t) = 1$;当$t \notin G_{j,v}$时$\phi_{j,v}(t) = 0$.令

$$\phi_v(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_{j,v}(t),$$

则$\phi_v(t) \in C_0(\Omega, \mathscr{H})$,且

$$\|\phi_v\|_{C_0(\Omega, \mathscr{H})} = \|\varphi\|_{\sup},$$

$$F(\mathscr{P}_n(\phi_v(t))) - \int_{\Omega} (\varphi(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)) =$$

$$\int_{\Omega} (\phi_v(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)) - \int_{\Omega} (\varphi(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{G_{j,v} - K_{j,v}} (\phi_v(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)) - \sum_{j=1}^{m} \int_{E_j - K_{j,v}} (\varphi(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)).$$

故

$$\left|F(P_n(\phi_v(t))) - \int_{\Omega} (\varphi(t), \mathrm{d}\sigma_n(t))\right| \leqslant$$

$$\|\phi_v\|_{C_0(\Omega, \mathscr{H})} \sum_{j=1}^{m} \left|\sigma_n\right|(G_{j,v} - K_{j,v}) +$$

$$\|\varphi\|_{\sup} \sum_{j=1}^{m} \left|\sigma_n\right|(E_{j,v} - K_{j,v}) < \frac{1}{v}$$

故

$$\int_{\Omega} (\varphi(t), \mathrm{d}\sigma_n(t)) = \lim_{v \to \infty} F(\mathscr{P}_n(\phi_v(t))),$$

由于

$$\left|F(\mathscr{P}_n(\phi_v(t)))\right| \leqslant \|F\|\left\|\mathscr{P}_n(\phi_v(t))\right\|_{C_0(\Omega, \mathscr{H})} \leqslant$$

$$\|F\|\|\phi_v\|_{C_0(\Omega, \mathscr{H})} = \|F\|\|\varphi\|_{\sup},$$

于是

$$\left|\int_{\Omega} (\varphi(t), \mathrm{d}\sigma_n(t))\right| \leqslant \|F\|\|\varphi\|_{\sup},$$

若$\sigma_n(E_j) \neq 0$,取$a_j = \dfrac{\sigma_n(E_j)}{\left\|\sigma_n(E_j)\right\|_{\mathscr{H}}}$;若$\sigma_n(E_j) = 0$,取

$a_j = 0\left(1 \leqslant j \leqslant m\right)$.则由上式得

$$\sum_{j=1}^{m}\left\|\sigma_n\left(E_j\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|F\|,$$

由此,对集族$\left\{E_j\right\}_{j=1}^{m}$取上确界有

$$\left|\sigma_n\right|(\Omega) \leqslant \|F\|,$$

令$n \to \infty$,得

$$|\sigma|(\Omega) \leqslant \|F\|.$$

所以σ是有界变差的向量测度.

设$f \in C_0(\Omega, \mathcal{H})$,则对于任意正数$\varepsilon$,存在紧子集$K \subset \Omega$,使得当$t \in \Omega - K$时,有$\left\|f(t)\right\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$.由于$\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left\|f(t)\right\|_{\mathcal{H}}$,于是当$t \in \Omega - K$时有$\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$ $(n \geqslant 1)$.因$\left\|f(t) - P_{n+1}\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}}$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} = 0$,及$f(t) - P_n\left(f(t)\right)$在$\Omega$上连续,由Dini定理,$\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}}$在紧子集$K$上一致收敛于0,从而存在$N > 0$,使得当$n > N$时,有$\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$对$t \in K$成立.于是当$n > N$时,

$$\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon, \quad (t \in \Omega),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f(t) - P_n\left(f(t)\right)\right\|_{C_0(\Omega, \mathcal{H})} = 0,$$

这样

$$F\left(f\right) = \lim_{n\to\infty} F\left(P_n\left(f(t)\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left(P_n\left(f(t)\right), \mathrm{d}\sigma(t)\right) = \int_{\Omega}\left(f(t), \mathrm{d}\sigma(t)\right),$$

且$\|F\| \leqslant |\sigma|(\Omega)$.故有

定理2 设Ω是局部紧的Hausdorff空间,$\mathcal{H}$是可分的Hilbert空间,F是$C_0(\Omega, \mathcal{H})$上任意的有界线性泛函,则在$\left(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\right)$上存在唯一$\mathcal{H}$值有界变差可数可加测度$\sigma$,使得对与任意$f \in C_0(\Omega, \mathcal{H})$,皆有

$$F\left(f\right) = \int_{\Omega}\left(f(t), \mathrm{d}\sigma(t)\right),$$

且

$$\|F\| = |\sigma|(\Omega).$$

此外,$\left(C_0(\Omega, \mathcal{H})\right)^*$与$\left(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\right)$上$\mathcal{H}$值有界变差可数可加测度所构成的空间等距同构.

现在考虑从$C_0(\Omega, \mathcal{H})$到$\mathcal{H}$的有界线性算子T,则对于任意的$f \in C_0(\Omega, \mathcal{H})$,$T\left(f\right) \in \mathcal{H}$,对于任意$x \in \mathcal{H}$,则$\left(T\left(f\right), x\right)$是$f \in C_0(\Omega, \mathcal{H})$的有界线性泛函,于是由定理2,在$\left(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)\right)$上存在唯一$\mathcal{H}$值有界变差可数可加测度$\sigma_x$,使得

$$\left(T\left(f\right), x\right) = \int_{\Omega}\left(f(t), \mathrm{d}\sigma_x(t)\right),$$

且σ_x的全变差测度

$$\left|\sigma_x\right|(\Omega) =$$

$$\sup\left\{\left|\left(T\left(f\right), x\right)\right| : f \in C_0(\Omega, \mathcal{H}), \left\|f\right\|_{f \in C_0(\Omega, \mathcal{H})} \leqslant 1\right\} \leqslant$$

$$\|T\|\|x\|_{\mathcal{H}}$$

对于$\forall E \in \mathcal{B}(\Omega)$,$\sigma_x(E) \in \mathcal{H}$,且对$\forall x, y \in \mathcal{H}$,对任意标量$\alpha, \beta$

$$\sigma_{\alpha x + \beta y}(E) = \alpha\sigma_x(E) + \beta\sigma_y(E),$$

且

$$\left\|\sigma_x(E)\right\|_{\mathcal{H}} \leqslant \left|\sigma_x\right|(E) \leqslant \left|\sigma_x\right|(\Omega) \leqslant \|T\|\|x\|_{\mathcal{H}},$$

从而$x \mapsto \sigma_x(E)$定义了$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}$的一个有界线性算子,记之为$\sigma(E)$,使得

$$\sigma(E)(x) = \sigma_x(E),$$

由于σ_x是可数可加的向量测度,对于$\mathcal{B}(\Omega)$两两互不相交的集列$\left\{E_n\right\}$,

$$\sigma_x\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_x\left(E_n\right),$$

即

$$\sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma\left(E_n\right)(x),$$

这样算子值测度σ的总半变差测度为

$$\|\sigma\|(\Omega) = \sup\left\{\left|\sigma_x\right|(\Omega) : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1\right\} =$$

$$\sup\left\{\left|\left(T\left(f\right), x\right)\right| : \|x\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1, \left\|f\right\|_{f \in C_0(\Omega, \mathcal{H})} \leqslant 1\right\} = \|T\|,$$

对于$\forall E \in \mathcal{B}(\Omega)$,记从$\mathcal{H}$到$\mathcal{H}$的一个有界线性算子$\sigma(E)$的共轭算子为$\sigma^*(E) = \left(\sigma(E)\right)^*$,则对于任意的$x, y \in H$,及互不相交的集列$\left\{E_n\right\} \subset \mathcal{B}(\Omega)$,有

$$\left(\sigma^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)x, y\right) = \left(x, \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)y\right) =$$

$$\left(x, \sum_{n=1}^{\infty}\sigma\left(E_n\right)y\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(x, \sigma\left(E_n\right)y\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma^*\left(E_n\right)x, y\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^*\left(E_n\right)x, y\right),$$

于是,$\sigma^*(\cdot)x$作为$\mathcal{B}(\Omega)$上的$\mathcal{H}$值向量测度具有弱可数可加性,由Pettis定理可知$\sigma^*(\cdot)x$是$\mathcal{B}(\Omega)$上的$\mathcal{H}$值的强可数可加向量测度

$$\sigma^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)x=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma^*\left(E_n\right)x,$$

依$\mathcal{H}$范数收敛.由此可表示为

$$T(f)=\int_{\Omega}f(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t),$$

其意义解释如下,对于从Ω到$\mathcal{H}$的$\mathcal{B}(\Omega)$可测的简单函数$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k\chi_{E_k}(x)$,其中$a_k\in\mathcal{H}$,$\{E_k:1\leqslant k\leqslant m\}$是$m$个互不相交的Borel可测集,定义积分

$$\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t)=\sum_{k=1}^{m}\sigma^*\left(E_k\right)a_k,$$

则对于任意的$x\in H$,有

$$\left(\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t),x\right)=\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma_x(t),$$

于是

$$\left\|\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t)\right\|_{\mathcal{H}}=\sup\left\{\left|\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma_x(t)\right|:\|x\|_{\mathcal{H}}\leqslant 1\right\},$$

于是

$$\sup\left\{\left\|\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t)\right\|_{\mathcal{H}}:\|\varphi\|_{\sup}\leqslant 1\right\}=$$

$$\sup\left\{\left|\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma_x(t)\right|:\|x\|_{\mathcal{H}}\leqslant 1,\|\varphi\|_{\sup}\leqslant 1\right\}=$$

$$\sup\left\{\left|\sigma_x\right|(\Omega):\|x\|_{\mathcal{H}}\leqslant 1\right\}=\|\sigma\|(\Omega),$$

故

$$\varphi\mapsto\int_{\Omega}\varphi(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t)$$

是$S\left(\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right),H\right)$到$\mathcal{H}$的有界线性算子,其范数为$\|\sigma\|(\Omega)$.将这个线性算子唯一的连续线性扩充到$B\left(\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right),H\right)$上,对任意的$f\in B\left(\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right),H\right)$,在所对应的扩充算子作用下的像,称为$f$关于$\sigma^*$的积分,记为

$$\int_{\Omega}f(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t).$$

由于$C_0(\Omega,\mathcal{H})$是$B\left(\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right),H\right)$的在空间,则$f\in C_0(\Omega,\mathcal{H})$关于$\sigma^*$的积分则在上述意义下理解.于是,有

定理3 对于从$C_0(\Omega,\mathcal{H})$到$\mathcal{H}$的有界线性算子T,存在$\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right)$上唯一的$B(\mathcal{H},\mathcal{H})$值的强可数可加的半有界变差算子测度$\sigma$,使得对于任意$f\in C_0(\Omega,\mathcal{H})$,

$$T(f)=\int_{\Omega}f(t)\,\mathrm{d}\sigma^*(t),$$

且

$$\|T\|=\|\sigma\|(\Omega),$$

于是$\mathcal{B}\left(\mathrm{C}_0(\Omega,\mathcal{H}),H\right)$与$\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right)$上$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$-值的强可数可加的半有界变差算子测度所构成的空间等距同构.

引理3 设Ω是局部紧的Hausdorff空间,$\mathcal{H}$是可分的Hilbert空间,μ是$\left(\Omega,\mathcal{B}(\Omega)\right)$上$\mathcal{H}$值有界变差的可数可加的向量测度.对于任意$E_j\in\mathcal{B}(\Omega)\left(1\leqslant j\leqslant m\right)$,使得$E_i\cap E_j=\varnothing\left(i\neq j\right)$,则对任意的$\varepsilon>0$,存在紧子集$K_j\subset E_j$,及互不相交的开集$G_j\supset K_j\left(1\leqslant j\leqslant m\right)$,连续函数$\varphi_j$使得

$$0\leqslant\varphi_j(x)\leqslant 1,\quad x\in\Omega,\tag{1}$$

$$\varphi_j(x)=1,x\in K_j;\quad\varphi_j(x)=0,x\notin G_j,\tag{2}$$

有

$$\sum_{j=1}^{m}\left\|\mu\left(E_j\right)-\int_{\Omega}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right\|_{\mathcal{H}}<\varepsilon.\tag{3}$$

证明 由于μ是可数可加的向量测度,则其全变差测度$|\mu|$是可数可加的正测度.由于其有界变差的假定,即$|\mu|(\Omega)<\infty$,从而$|\mu|$是局部紧Hausdorff空间Ω上的正则Borel测度.于是对于任意的$\varepsilon>0$,存在紧子集$K_j\subset E_j$使得

$$\sum_{j=1}^{m}|\mu|\left(E_j-K_j\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

由于在局部紧Hausdorff空间Ω内,$K_j\left(1\leqslant j\leqslant m\right)$是互不相交的紧子集,于是存在互不相交的开子集$H_j$使得$H_j\supset K_j\left(1\leqslant j\leqslant m\right)$,进而由正则性,存在互不相交的开子集$G_j\supset K_j\left(1\leqslant j\leqslant m\right)$,使得$\overline{G_j}$为紧集,且

$$\sum_{j=1}^{m}|\mu|\left(G_j-K_j\right)<\frac{\varepsilon}{2},$$

由乌里松引理,存在满足条件(1)与(2)的函数$\varphi_j(x)$.因

$$\int_{\Omega}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\mu\left(K_j\right)+\int_{G_j-K_j}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

于是

$$\left\|\mu\left(E_j\right)-\int_{\Omega}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right\|_{\mathcal{H}}=$$

$$\left\|\mu\left(E_j-K_j\right)-\int_{G_j-K_j}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right\|_{\mathcal{H}}\leqslant$$

$$\left\|\mu\left(E_j-K_j\right)\right\|_{H}+\left\|\int_{G_j-K_j}\varphi_j(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right\|_{\mathcal{H}}\leqslant$$

$$|\mu|(E_j - K_j) + |\mu|(G_j - K_j),$$

故式(3)成立.

2 结束语

本文的主要内容包含3个定理,分别用向量测度和空间同构的方式得到了从$C_0(\Omega, H)$到H、从$C_0(\Omega, H)$到C、从$C_0(\Omega)$到H的3类有界线性算子的表现定理具体结构,把闭区间上的连续函数空间上的有界线性泛函的Riesz表现定理推广到局部紧的Hausdorff空间上,这个结论还是比较重要的.

作者在文[19]中通过引入H值缓增分布的方式,借助其Fourier变换的特征得到了Banach空间值的L^2到L^2空间上的有界线性算子的结构和范数的精确等式,但是在研究Banach空间值的L^1到L^1空间上的有界线性算子的结构时,却发现之前的方式走不通,于是开始尝试从向量测度、算子测度以及全变差测度的角度来度量算子结构,在这个问题上将广义泛函上的Riesz表现定理推广到向量值函数空间上就显得尤为重要了.

参 考 文 献

[1] 于树模.向量值p次可积函数空间中的乘子[J].数学年刊A辑(中文版),1987(5):535-543.

[2] 蔺友江.Riesz表示定理的推广形式[J].西南师范大学学报(自然科学版),2019,44(2):1-4.

[3] 徐胜芝.向量值函数的积分[J].数学学报,1998(4):108-119.

[4] ROBDERA M A. On the Riesz representation theorem and integral operators[J]. Quaestiones Mathematicae, 2016,39(4):441-455.

[5] STEIN E M,WEISS G L.欧氏空间上的Fourier分析引论[M].张阳春,译.上海:上海科学技术出版社,1987.

[6] 何少勇,朱相荣.高维Hausdorff算子在$H^p(\mathbf{R}^n)$上的有界性[J].数学学报,2021,64(2):289-300.

[7] 郑涛涛,陶祥兴.Dini型多线性Caldern-Zygmund算子的多线性迭代交换子在非齐性空间上的有界性[J].中国科学(数学),2017,47(9):1029-1046.

[8] 顾娟,刘照升,周永芳,等.抽象对偶系统中的Orlicz-Pettis型定理[J].数学的实践与认识,2010,40(20):143-145.

[9] 黎永锦,林洁珠.连续双线性泛函与BANACH空间凸性[J].中山大学学报(自然科学版),2006(1):17-19.

[10] 赵焕光.Banach空间上线性算子的若干性质[J].浙江师范学院学报(自然科学版),1988(1):16-20.

[11] 崔成日,徐宪民.关于算子值测度的两种半变差概念的差异[J].延边大学学报(自然科学版),1998(1):68-69.

[12] 黄瑞.拓扑空间中紧致子集的性质研究[J].安庆师范大学学报(自然科学版),2021,27(1):11-14+21.

[13] CALDERÓN A P. An atomic decomposition of distributions in parabolic H^p spaces[J]. Advances in Mathematics,1977,25(3):216-225.

[14] CALDERON A P, ZYGMUND A. On the existence of certain singular integrals[J]. Acta Mathematica, 1952, 88:85-139.

[16] STEIN E M. Singular integrals and differentiability properties of functions (PMS-30)[M]. New Jersey: Princeton University Press,2016.

[17] STEIN E M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals (PMS-43)[M]. New Jersey: Princeton University Press,2016.

[18] 施咸亮,陈洁.紧框架中的Korovkin型定理[J].中国科学(数学),2013,43(11):1131-1144.

[19] 汪成咏,王序岩.L^2空间至L^2空间的算子刻画[J].首都师范大学学报(自然科学版),2021,42(5):19-22.

(责任编辑:马田田)