首都师范大学学报(自然科学版)
第41卷 第3期 Journal of Capital Normal University No. 3
2020年6月 (Natural Science Edition) Jun. ,2020

高等代数中一般化为特殊的数学思想方法*

李 斐[1] 郭 卉[2]

(1. 安徽财经大学统计与应用数学学院,安徽 蚌埠 233030; 2. 安徽财经大学会计学院,安徽 蚌埠 233030)

摘要:一般化归为特殊的思想方法是高等代数课程中最常见的数学思想方法之一. 本文讨论并总结了高等代数课程中一般化为特殊的思想方法的10个方面.

关键词:高等代数;一般化方法;特殊化方法;矩阵;线性空间与线性变换

中图分类号:G424 **DOI**:10.19789/j.1004-9398.2020.03.004

0 引 言

数学中每一个概念的建立和每一个结论得出的过程中,都会含有一定的数学思想和方法. 从教学的角度,教师不仅要教授给学生概念和定理等显性的知识,而且要在教授显性知识的过程中给学生展示显性知识背后隐性的数学思想方法. 若将显性知识比作是“鱼”,则隐性的思想方法就是“渔”. 数学概念、定理与公式对于大多数学生来说,毕业后工作不会直接用到,但是从数学中学来的数学思想方法会迁移应用到工作和生活之中. 这要求教师“授之以鱼,不如授之以渔”. 进行数学思想方法教学更能实施和体现数学的文化育人功能. 从学习的角度,学生学习数学不仅学习公式和解题,而且应该学习与了解数学知识建立过程中的思想方法. 以避免死读书及认为数学就是公式、计算、解题与考试的僵化模式,学习中多注意融会贯通数学的思想方法,会更好地提升个人的科学文化涵养. 日本数学教育家米山国藏[1]认为,无论对于科学工作者、技术人员,还是数学教育工作者,最重要的是数学的精神、思想和方法,而数学知识只是第二位的. 关于数学思想与方法在数学教育中的作用的论述,读者也可以参考文献[2-4].

本文总结了关于高等代数课程的教学经验和教学思考[5-6],探讨了蕴含一般化为特殊的数学思想方法的经典课程内容.

1 一般化为特殊的涵义与作用

一般化为特殊的思想方法就是当考虑一般性的问题时,从这个一般性的研究对象出发,转而考虑包含在该研究对象之中的一类特殊的研究对象,并力图基于特殊到一般的关系,去解决最初一般性的问题. 对于初始的研究问题,可以先考虑解决包含在该问题之中的一个特殊条件下的问题. 如果初始的研究对象是一个需要证明的一般性结论,为了证明,可以考虑证明一个包含在该结论中特殊情形下的某一类结论. 总之,一般化为特殊方法就是把要解决的问题,通过增加限制条件,放入一个更特殊的和有利于解决的情景之中,一旦解决了特殊问题,再去寻找最初的问题解决之道和建立更一般性的结论.

一般性问题是具有共性的一类问题,特殊性问题是一般性问题中具有个性的问题. 马克思主义哲学认为共性和个性是一切事物固有的本性,每一事物既有共性又有个性. 个性体现并丰富着共性. 共性只能在个性中存在. 一般化为特殊的思想方法的作用在于利用特殊性问题找到解决一般性问题的突破口. 特殊性问题是个别问题,有较强的额外条件,会突出主要矛盾,暴露解决问题的关键之处,从而使问题变得简单而易于被解决. 这打开了解决一般性问题的一个点,然后由点及面,最终可能为解决一般性问题开辟道路.

共性和个性在一定条件下会相互转化. 一般化为特殊的思想方法的更强作用还在于特殊性和一般性有时是等价的. 特殊问题不是一般问题. 有时特殊问题是一般问题的核心部分. 特殊问题的解决,通过一般问题与特殊问题的关系与转化渠道,反过来可以解决最初的一般性问题. 这些关系与转化渠道就是特殊与一般的相互转化的条件,基于此特殊和一般实现等价.

收稿日期:2019-05-05

*安徽财经大学教学教改精品课程项目(acjpkc201807)

2 高等代数课程中相关案例

高等代数课程中的数学思想方法有其鲜明特点,就是在各个章节的知识中含有一般化归为特殊的数学思想方法.本文总结了高等代数课程中蕴含一般化归为特殊这一数学思想方法的 10 个方面的例子.

2.1 排列的奇偶性与对换

在对行列式进行定义时,需要奇偶排列的概念:前 n 个正整数的一个排列逆序数为奇数,称为奇排列,为偶数则称为偶排列.为了给出行列式更一般化的定义和为了证明行列式的几个重要的性质[5],需要证明这个关键结论:对换(交换 2 个数字的位置)会改变排列的奇偶性.怎样证明这个结论呢?解决的思路是首先证明:相邻对换改变排列的奇偶性.证明这个特殊化的结论相对简单些,因为容易看到相邻对换使得逆序数增加 1 个或者减少 1 个.其次任何对换都是经过有限次相邻对换变换而来,而且一定是奇数次相邻对换.因此,当反复利用"相邻对换改变排列的奇偶性"这一特殊的结论时,得到了更一般化的结论"对换会改变排列的奇偶性".解决问题的策略和方法就是把一般性的问题化归为特殊化的问题,最后在这个问题上一般化和特殊化 2 个方面是等价的,从而问题得到了解决.

2.2 行列式的三角化计算

在给出行列式的定义之后,需计算行列式的值.根据定义,对于 1 个 n 阶行列式需要对 $n!$(n 的阶乘)项求和.易于验证 1 个不太符合直觉然而是正确的不等式:$30! > 10^{30}$.显然,用定义去计算行列式计算复杂度太大.可是一些特殊的行列式的值通过定义可以很容易求得,那就是三角形行列式,其值等于主对角线上元素的积.因此,利用行列式的性质,通过行变换(或者列变换),不需要大的计算量,就能把一般的行列式转化成三角形行列式,从而计算行列式.这个方法称之为三角化方法.把一般行列式的计算转化为特殊行列式的计算,这是一般化归为特殊的数学思想方法的经典例子.

2.3 矩阵的幂与 Jordan 标准形

计算方阵的幂不是一件简单的事.对于一些特殊的方阵,幂的计算就相对简单得多.这些特殊的方阵就是 Jordan 标准形矩阵,最特殊的就是对角矩阵.每个复方阵 $\boldsymbol{A}$ 都和 1 个 Jordan 标准形矩阵 $\boldsymbol{J}$ 相似,即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}$. 理论上通过求矩阵的特征值和特征向量或者求矩阵初等因子的方法,可以找到矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{J}$. 因此 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}^k\boldsymbol{P}$,把一般矩阵的幂的计算转化成 Jordan 标准形这样的特殊矩阵的幂的计算.

2.4 非齐次线性方程组与齐次线性方程组

在所有的线性方程组之中,最特殊的一类就是齐次线性方程组了.对于一般的线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$,当有 1 个解 ζ 时,称之为 1 个特解.要想弄清楚 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的解的结构,只要弄清楚导出组即对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的解的结构. $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$ 的解在向量的线性运算下是封闭的,是一个线性子空间,称之为解空间.解空间的极大线性无关组称之为基础解系.导出组的所有解加上这个特解 ζ 就得到了 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的所有解.导出组的解按照特解 ζ 做一个平移就得到 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 的所有解.把一般线性方程组解的结构问题便转化成为特殊形式方程组——齐次线性方程组的解的结构问题.

2.5 求解矩阵的秩

矩阵的秩就是矩阵的行秩(或列秩)或者是矩阵的非零子式的最高阶数.虽然从矩阵秩的定义看不到秩是多少,但是有一类特殊矩阵可得秩的大小.这类特殊矩阵就是行阶梯型矩阵,它的秩等于非零行的行数.怎样去求 1 个一般矩阵的秩呢?把求矩阵的秩转化为求阶梯型矩阵的秩.矩阵通过有限次的初等变换可以转化成阶梯型矩阵,同时秩在初等变换的过程中是 1 个不变量.由此求矩阵秩的问题经过特殊化而成为求特殊矩阵,即阶梯型矩阵秩的问题.

2.6 线性子空间直和的判定

如果 2 个线性子空间的和 $V_1 + V_2$ 中的元素做加法分解时分解方式是唯一的,称和 $V_1 + V_2$ 为直和.高等代数课程中有几个直和的判定方法,下面所列举的其中之一就体现了把一般问题化归为特殊问题这一数学思想方法.零向量是向量加法运算中的特殊元素.判定每个元素的加法分解是否唯一,只要转化为判定零向量的分解是否唯一就达到了目标[5].这里一般性和特殊性是等价的.

2.7 线性变换为单射的判定

一个线性空间上的线性变换何时是一个单射?按照定义,像集中每 1 个元素的的原像只有 1 个那就是单射.不必要判定 1 个一般的元素原像是否唯一,只要判定零向量的原像是否唯一,也就是零向量的原像是否只有零向量就可以了.即线性变换是单射的充要条件是它的核空间是零空间.把 1 个一般性的判定问题转化成一个特殊性的判定问题.

2.8　n 维线性空间

线性空间的概念是坐标向量空间概念的一般化和抽象化. 由于概念的抽象性,初学者对于线性空间感到难以掌握,对空间的向量是什么模糊不清. 但是对于有限维线性空间,比如 n 维线性空间一般性的概念,可通过化归为特殊化线性空间,从而理解与掌握线性空间的抽象定义. 这个特殊的线性空间就是 n 维坐标向量空间. 所有的 n 维线性空间都和 n 维坐标向量空间同构. 最终,n 维线性空间本质上只有 1 个,那就是 n 维坐标向量空间. 通过对坐标向量空间的学习,学生可以体会和逐步掌握线性空间一般性的抽象概念.

2.9　n 维欧几里得空间

有限维的,比如 n 维欧几里得空间,空间中的向量可以是各式各样的抽象的或者具体的数与量的数学研究对象. 即使欧几里得空间作为线性空间是同一个,但是内积运算可以各有不同. 从欧几里得空间的定义中既看不到向量的面目,也看不到内积运算的具体内容. 欧几里得空间是一个抽象的一般性的概念,其中的内积运算也是一个抽象的运算. 对于 n 维欧几里得空间,有一个特殊的具体的空间,那就是 n 维坐标向量空间 R^n(R 表示实数域). 其中的内积运算是向量对应坐标分量相乘后求和. 所有 n 维欧几里得空间都与 R^n 同构. 也就是同构的意义下,n 维欧几里得空间只有 1 个,就是 R^n. 这样,当学习和研究一般的抽象概念 n 维欧几里得空间时,可以通过一个特殊的欧几里得空间 R^n 去理解和掌握这个一般性的抽象的概念.

2.10　二次型的标准形

标准形二次型是一类特殊的二次型. 通过初等的配方法和矩阵的合同变换方法,可以把二次型化为标准形,也就是只有平方项的二次型. 对于实二次型还可以通过正交变换化成标准形. 对于关于二次型的诸多性质的问题,化成标准形后就可以得以解决. 比如实二次型化成标准形后,便可知其秩、正惯性指数和负惯性指数等.

3　结束语

一般化成特殊是高等代数课程中最为典型的数学思想方法之一,其贯穿在整个课程之中. 本文只是总结了其中具有代表性的 10 个方面. 一般化成特殊的数学思想方法也体现了高等代数课程的数学特色,在教授数学知识的同时,指出和介绍这一数学思想方法有利于学生对高等代数课程的学习.

参 考 文 献

[1] 米山国藏. 数学的精神、思想和方法[M]. 毛正中,吴素华, 译. 成都:四川教育出版社,1986.

[2] 顾泠沅,邵光华. 作为教学任务的数学思想和方法[M]. 上海:上海教育出版社,2009.

[3] 顾泠沅,朱成杰. 数学思想方法[M]. 北京:中央广播电视大学出版社,2004.

[4] 熊惠民. 数学思想方法通论[M]. 北京:科学出版社,2010.

[5] 王萼芳,石生明. 高等代数[M]. 4 版. 北京:高等教育出版社,2013.

[6] 张禾瑞. 高等代数[M]. 北京:高等教育出版社,2007.

The Mathematical Thought and Method of Generalization to Specialization in Advanced Algebra

LI Fei[1]　GUO Hui[2]

(1. School of Statistics and Applied Mathematics, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu Anhui　233030;
2. Accounting College, Anhui University of Finance and Economics, Bengbu Anhui　233030)

Abstract: The thought and method of generalization to specialization is one of the most common mathematical thinking methods in Advanced Algebra. This paper discusses and summarizes ten aspects about the idea and method in Advanced Algebra.

Keywords: advanced algebra; mathematical method of generalization; mathematical method of specialization; matrix; linear space and linear transformation