DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.02.002

2 个 r 角形数补数序列的混合均值研究*

白甲志 黄 炜**
(宝鸡职业技术学院基础部,陕西 宝鸡 721013)

摘 要

利用初等方法和解析方法,研究了两个 Smarandache 函数的性质,获得了混合均值性质及渐近公式,从而拓展了经典的算术函数的相关研究工作.

关键词: r 边形数补数,数论函数,混合均值,渐近公式.
中图分类号: O156.4

1 引言与结论

1.1 Smarandache 问题

著名美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 所做出的最重要的一项就是提出了一系列出色的解析数论中的问题和猜想,1993 年出版的的《Only Problems, Not Solutions》[1] 一书中他就提出了 105 个数论中尚未解决的问题和猜想,引起了许多学者的极大研究兴趣,其中第 27 个问题中包含补数序列,F. Samrandache 教授要求研究这个数列的性质,已有许多学者对这个问题进行了研究[2-7].

1.2 r 多边形数

公元前六百年,毕达哥拉斯学派研究整数时,发现能用正三边形,正四边形,正五边形等图形上的点可以表示数,即这些数目的点子可以排成一个 r 边形,这样就把整数与几何图形联系起来,创建了三边形数,正四边形,五边形数和六边形数等 r 多边形数,r 边形数可表示为[8]:$\frac{1}{2}(2m+m(m-1)\cdot(r-2))$,$r\geqslant 3$,$r$ 边形数通常记为 $S(m,r)$,$r,m\in N^+$.

1.3 相关定义

定义 1 对于任何正整数 n,n 的 r 边形数部分数列定义如下

$$u_r(n)=\max\left\{m+\frac{1}{2}m(m-1)\cdot(r-2):n\geqslant m+\frac{1}{2}m(m-1)\cdot(r-2),r,m\in N^+,r\geqslant 3\right\},$$

$$v_r(n)=\min\left\{m+\frac{1}{2}m(m-1)\cdot(r-2):n\leqslant m+\frac{1}{2}m(m-1)\cdot(r-2),r,m\in N^+,r\geqslant 3\right\},$$

同时称 $a(n)=n-u_r(n)$ 及 $b(n)=v_r(n)-n$ 分别称为上、下部 r 边形数部分数列的补数数列;

定义 2 对于任意的正整数 $n>1$,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式,除数函数为:$d(n)=\sum_{d\mid n}1$;

定义 3 对于任意的正整数 $n>1$,令 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式,指数函数为:

$$e_p(n)=\max\{\alpha:p^{\alpha}\mid n\}.$$

1.4 结论

有关 r 边形数列及补数数列复合均值分布的研究结果也不少[2-3],我们利用初等数列中的常用方法研究了关于 r 边形数上、下补数列 $a(n)$ 和 $b(n)$ 与二个数论函数 $d(n)$ 和 $e_p(n)$ 的积函数 $d(n)a(n)$ 与 $d(n)b(n)$、$e_p(n)a(n)$ 和 $e_p(n)b(n)$ 混合均值分布,即证明了下面的结论:

定理 1: 设 k 是给定任意正整数,对于任意实数 $x>1$,有下面的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)a(n)=\left(\frac{2}{r-2}\right)^{\frac{7}{4}}x^{\frac{7}{4}}\sum_{i=1}^{k}\frac{B_i}{\ln^i x}+O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^{k+1}M}\right),\quad(\mathrm{I})$$

收稿日期:2016-01-23
* 国家自然科学基金项目(11201363),陕西省自然科学基金项目(09JK432).
**通讯作者

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 B_i ($i = 1,2,3,\cdots,k$) 是可计算常数.

$$\sum_{n\leqslant x} d(n)b(n) = x^{\frac{7}{4}}\sum_{i=1}^{k}\frac{B'_i}{\ln^i x} + O\left(\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\ln^{k+1}M}\right), \quad (\text{Ⅱ})$$

其中 B_i'($i = 1,2,3,\cdots,k$) 是可计算常数.

定理 2: 设 k 是给定任意正整数,对于任意实数 $x > 1$, 有下面的渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)a(n) = \frac{4\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{15(r-2)^{\frac{3}{4}}}\frac{x^{\frac{5}{4}}}{p-1} + O(x^{\frac{3}{4}}\ln^2 x), \quad (\text{Ⅲ})$$

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n)b(n) = \frac{4\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{15(r-2)^{\frac{3}{4}}}\frac{x^{\frac{5}{4}}}{p-1} + O(x^{\frac{3}{4}}\ln^2 x). \quad (\text{Ⅳ})$$

2　引　理

要完成证明定理,我们需要以下引理.

引理 1 [3-5]: 对于任何实数 $n > 1$, 设 $u_r(n) = \frac{1}{2}(m + m(m-1)\cdot(r-2))$, 或 $v_r(n) = \frac{1}{2}((m+1) + m(m+1)\cdot(r-2))$, 则有渐近公式

$$m = \frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2} + O(1).$$

引理 2 [3]: 对于任意实数 $x > 1$, 有下面的渐进公式

$$\sum_{n\leqslant x} a(n) = \frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x),$$

$$\sum_{n\leqslant x} b(n) = \frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x).$$

引理 3 [2]: 对于任意实数 $x \geqslant 3$, 有下列渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x} d(x) = x\ln x + (2\gamma - 1)x + O(x^{\frac{1}{2}}),$$

其中 γ 是欧拉常数.

引理 4 [3]: 引理　设 p 为一个素数,对于任意非负整数 m,对于任何实数 $x \geqslant 1$, 有下列渐近公式

$$\sum_{n\leqslant x} e_p(n) = \frac{x}{p-1} + O(\log^2 x).$$

3　定理的证明

定理 1 的证明:

根据函数 $a(n)$ 的定义及 $d(n) \ll n^{\varepsilon}$(ε 为一固定的整数) ,有

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant x} d(n)a(n) &= \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{i\leqslant(r-2)m} d(n)a(n) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)} d(i)a(i)\Big)\\
&= \sum_{m=1}^{M} d(n)\sum_{i\leqslant(r-2)m} a(i) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)} d(i)a(i)\Big)\\
&= \sum_{m=1}^{M} d(m)\left(\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}x^{\frac{3}{2}} + O(x)\right) + O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)} d(i)a(i)\Big)\\
&= \frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}\sum_{m=1}^{M} d(m)m^{\frac{3}{2}} + O(V(M)M^{\frac{3}{2}}),
\end{aligned}$$

$d(n) \ll n^{\varepsilon}$, 其中 ε 为一固定的整数.

令 $A(x) = \sum_{n\leqslant x} d(n)$, 用 able 求和公式 [6,7] 及引理 2、3 得:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{M} t^{\frac{3}{2}}d(t) &= M^{\frac{3}{2}}A(M) - \int_2^M A(t)\,(t^{\frac{3}{2}})'dt + O(1)\\
&= M^{\frac{3}{2}}\Big(\sum_{n\leqslant x} d(n)\Big) - \int_2^M \Big(\sum_{n\leqslant x} d(n)\Big)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt + O(1)\\
&= M^{\frac{3}{2}}(M\ln M + (2\gamma-1)M + O(M^{\frac{1}{2}})) - \int_2^M (t^{\frac{3}{2}}\ln t + (2\gamma-1)t^{\frac{3}{2}} + O(t^{\frac{3}{2}}))dt\\
&= M^{\frac{5}{2}}\ln M + (2\gamma-1)M^{\frac{5}{2}} + O(M^2) - \frac{3}{5}(M^{\frac{5}{2}}\ln M + (2\gamma-1)M^{\frac{5}{2}})\\
&= \frac{2}{5}M^{\frac{5}{2}}\ln M + \frac{2}{5}(2\gamma-1)M^{\frac{5}{2}} + O(M^2).
\end{aligned}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

注意到 $M=\frac{\sqrt{2(r-2)n}}{r-2}+O(1)$,且 $\ln M=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$,我们立即有:

$$\sum_{n\leqslant x}d(n)a(n)=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}\frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right)^{\frac{5}{2}}\times\ln\sqrt{\frac{2x}{r-2}}+\frac{2}{5}(2\gamma-1)\left(\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right)^{\frac{5}{2}}+O(x)$$

$$=\frac{4\times 2^{\frac{3}{4}}}{15(r-2)^{\frac{3}{4}}}x^{\frac{5}{4}}\ln x+\frac{4\times 2^{\frac{1}{4}}(2\gamma-1)}{5(r-2)^{\frac{5}{4}}}x^{\frac{5}{4}}+O(x).$$

这就完成了定理 1 中(Ⅰ)的证明,类似的可给出定理 1 中(Ⅱ)的证明.

定理 2 的证明:

类似于定理 1 的证明,根据函数 $a(n)$ 的定义及 $e_p(n)\ll n^{\varepsilon}$($\varepsilon$ 为一固定的整数)有

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(n)a(n)=\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{i\leqslant\sqrt{(r-2)m}}e_p(i)a(i)+O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)}e_p(i)a(n)\Big)$$

$$=\sum_{m=1}^{M-1}e_p(m)\sum_{i\leqslant\sqrt{(r-2)m}}a(i)+O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)}e_p(i)a(n)\Big)$$

$$=\sum_{m=1}^{M-1}e_p(m)\left(\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}m^{\frac{3}{2}}+O(m)\right)+O\Big(\sum_{i\leqslant x-\left(M+\frac{1}{2}M(M-1)\cdot(r-2)\right)}e_p(i)a(i)\Big)$$

$$=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}\sum_{m=1}^{M-1}e_p(m)m^{\frac{3}{2}}+O(e_p(M)M^{\frac{3}{2}}),$$

$e_p(n)\ll\varepsilon$,其中 ε 为一固定的整数.

令 $A(x)=\sum_{n\leqslant x}e_p(n)$,用 able 求和公式[6,7] 以及引理 2、4 得:

$$\sum_{t=1}^{M}t^{\frac{3}{2}}e_p(t)=M^{\frac{3}{2}}A(M)-\int_2^M A(t)\,(t^{\frac{3}{2}})'dt+O(1)$$

$$=M^{\frac{3}{2}}\Big(\sum_{n\leqslant x}e_p(n)\Big)-\int_2^M\Big(\sum_{n\leqslant x}e_p(n)\Big)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt+O(1)$$

$$=M^{\frac{3}{2}}\left(\frac{M}{p-1}+O(\ln^2 M)\right)-\int_2^M\left(\frac{t}{p-1}+O(\ln^2 t)\right)\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}dt+O(1)$$

$$=\frac{2}{5}\frac{M^{\frac{5}{2}}}{p-1}+O(M^{\frac{3}{2}}\ln^2 M),$$

注意到 $M=\frac{\sqrt{2(r-2)x}}{r-2}+O(1)$,且 $\ln M=\frac{1}{2}\ln x+O(1)$,我们立即有:

$$\sum_{n\leqslant x}e_p(n)a(n)=\frac{\sqrt{2(r-2)}}{3}\times\frac{2}{5}\left(\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{p-1}+O\left(\left(\sqrt{\frac{2x}{r-2}}\right)^{\frac{3}{2}}\ln^2 x\right)$$

$$=\frac{4\cdot 2^{\frac{3}{4}}}{15(r-2)^{\frac{3}{4}}}\frac{x^{\frac{5}{4}}}{p-1}+O(x^{\frac{3}{4}}\ln^2 x).$$

这就完成了定理 2 中(Ⅲ)的证明,类似的可给出定理 2 中(Ⅳ)的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems,Not solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House,1993.

[2] Tom M A. Introduction to analytic number theory [M]. New York: Springer,1976.

[3] 张文鹏. 关于正整数的六边形数部分 [J]. 商洛师范专科学校学报,2005(2): 2-3.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[4] 黄炜. 关于 r 角形数的补数及其均值 [J]. 科学技术与工程, 2009,9(18):5432 - 5434.
[5] Yi Yuan. On the triangle numbers complement and its asymptotic properties [J]. Journal of Sangluo Teachers College, 2005(2): 3 - 5.
[6] 黄炜. 两个包含 r 角形数补数的复合函数的渐近公式 [J]. 西南大学学报: 自然科学版,2010, 35(3):4 - 6.
[7] 杨存典,李超,刘端森. 关于五边形数的余数及其渐进公式 [J]. 甘肃科学学报, 2007,17(2):47 - 50.
[8] 李洁. 关于正整数的六边形数的补数部分 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2006,23(6):818 - 820.
[9] Zhang Wenpeng. Elementary number theory [M]. Xi'an: Shaanxi Normal University Press,2007.

Two *r*-side Polygon Number's Complements Sequence and Its Hybrid Mean Value Properties

Bai Jiazhi　Huang Wei

(Baoji Vocational and Technical College, Baoji Shaanxi　721013)

Abstract

Use the elementary and the analysis methods, to study the properties of the two Smarandache functions, some hybrid mean properties and some asymptotic formulas are obtained. The relevant research work of classical arithmetical function are developed.

Key words: *r*-side polygon complements sequence, arithmetical function, mean value, asymptotic formula.

通讯作者简介　黄炜(1961 -),男,陕西岐山人,教授,研究方向: 解析数论与特殊函数.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net