DOI:10.19789/j.1004-9398.2017.04.003

Euler 函数方程 $x^k - \varphi(x^k) = Px$ 的解*

张四保[1] 杨振志[2]

(1. 喀什大学数学与统计学院,新疆 喀什 844008; 2. 中铁快运股份有限公司乌鲁木齐分公司,新疆 乌鲁木齐 830011)

摘 要

探讨 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程 $x^k - \varphi(x^k) = Px$ 的解,其中 k 是 $k \geqslant 2$ 的正整数,$P = 1$ 或者 P 为素数. 利用初等的方法给出了只有当 $k = 2, 3$ 时这一方程有解,并给出其解的情况.

关键词: Euler 函数 $\varphi(n)$,方程,整数解.

中图分类号: O156

0 引 言

在数论中 Euler 函数 $\varphi(n)$ 是一类十分重要的函数. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$ 方程解的研究有着大量的文献. 文献[1]讨论了 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程 $\varphi(ab) = 2^k(\varphi(a) + \varphi(b))$ 的解,给出了当 $k = 2$ 时该方程的解,并给出了当 k 为任一正整数时该方程的5组解的形式,以及对于任一正整数 $k \geqslant 2$ 的2组解的形式. 文献[2]讨论了 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程 $\varphi(ab) = k(\varphi(a) + \varphi(b))$ 当 $k = 4, 6$ 时的解. 文献[3]讨论了 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程 $\varphi(ab) = k(\varphi(a) + \varphi(b))$ 当 $k = 8$ 的解,并给出了对于任意正整数 k,$(a, b) = (2k, 2k)$ 是方程 $\varphi(ab) = k(\varphi(a) + \varphi(b))$ 的解;$(a, b) = (2^{k+1}, 2^k \times 3)$ 和 $(2^k \times 3, 2^{k+1})$ 是方程 $\varphi(ab) = 2^k(\varphi(a) + \varphi(b))$ 的2解的结论. 文献[4]给出了 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的三类方程 $x - \varphi(x) = 2^{\omega(x)}$,$x - \varphi(\varphi(x)) = 2^{\omega(x)}$ 与 $\varphi(x^k) = 2^{\omega(x^k)}$ 的解. 而对于包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的形如 $\varphi(xyz) = k(\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z))$ 的方程的解也有所探论,如文献[5,6]. 不少的学者对包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 与 Smarandache 函数 $S(n)$ 两者的方程的解也有不少的研究,如文献[7-11]. 本文将讨论方程

$$x^k - \varphi(x^k) = Px \tag{1}$$

的解,其中 k 是正整数且满足 $k \geqslant 2$,$P = 1$ 或者 P 为素数.

1 结论及其证明

定理1 当 $P = 1$ 时,方程(1)只有在 $k = 2$ 时有解,且解为 $x = R$,其中 R 为任意素数. 当 P 为素数时,方程(1)只有在 $k = 2, 3$ 时有解. 若 $k = 2$,方程(1)有解 $x = P^2$,$x = \prod_{i=1}^{s} q_i$,其中 $q_i, q_j (i \neq j)$ 满足 $\gcd(q_i, q_j - 1) = 1, i = 1, 2, \cdots, s, j = 1, 2, \cdots, s$. 若 $k = 3$,方程(1)有解 $x = P$.

证明 显然 $x = 1$ 不满足(1). 令 $x = 2^{\alpha} \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$,其中 $\alpha, \beta_i \in Z$,且 $\alpha \geqslant 0$,$\beta_i \geqslant 0$,q_i 是满足 $3 \leqslant q_1 \leqslant \cdots \leqslant q_s$ 的素数,$i = 1, \cdots, s$.

情况1 当 $P = 1$ 时,分为如下情况:

情况1.1 当 $\alpha \neq 0, \beta_i = 0, i = 1, 2, \cdots, s$.

此时,有 $2^{k\alpha - 1} = 2^{\alpha}$,则有 $(k-1)\alpha = 1$,所以 $k = 2, \alpha = 1$,因而 $x = 2$ 是方程(1)的解.

情况1.2 当 $\alpha = 0, \beta_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, s$.

此时,方程(1)为 $\prod_{i=1}^{s} q_i^{k\beta_i} - \varphi(\prod_{i=1}^{s} q_i^{k\beta_i}) = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$. 从而有

$$\prod_{i=1}^{s} q_i^{k\beta_i - 1} [\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s} (q_i - 1)] = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i},$$

即 $$\prod_{i=1}^{s} q_i^{(k-1)\beta_i - 1} [\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s} (q_i - 1)] = 1.$$

因而有

收稿日期: 2016-05-24

* 新疆维吾尔族自治区自然科学基金项目(No: 2016D01A014).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}=1\\ \prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)=1\end{cases}. \quad (2)$$

对于(2)式有解 $s=1,\beta_1=1,k=2,q_1=R$, R 为素数. 从而 $x=R$ 是方程(1)的解,其中 R 为素数.

情况 1.3　当 $\alpha\neq 0,\beta_i\neq 0,i=1,2,\cdots,s.$

此时,方程(1)为 $2^{k\alpha}\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i}-\varphi(2^{k\alpha}\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i})=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i}$. 从而有

$$2^{k\alpha-1}\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i-1}[2\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=2^{\alpha}\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i},$$

即

$$2^{(k-1)\alpha-1}\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}[2\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=1. \quad (3)$$

由于 $2\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)>\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)\geqslant 2$,所以(3)式无解,因而此时方程(1)无解.

因而,当 $P=1$ 时,方程(1)只有在 $k=2$ 时有解,且此时全部的素数都是方程(1)的解.

情况 2　当 $P=2$,分为如下情况:

情况 2.1　当 $\alpha\neq 0,\beta_i=0,i=1,2,\cdots,s.$

此时,有 $2^{k\alpha-1}=2^{\alpha+1}$,则有 $k\alpha-1=\alpha+1$,因而有 $k=2,\alpha=2$ 或 $k=3,\alpha=1$.

当 $k=2,\alpha=2$ 时,$x=2^2=4$ 是(1)的解. 当 $k=3,\alpha=1$ 时,$x=2$ 是方程(1)的解.

情况 2.2　当 $\alpha=0,\beta_i\neq 0,i=1,2,\cdots,s.$

此时,方程(1)为 $\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i}-\varphi(\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i})=2\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i}$. 从而有

$$\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i-1}[\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=2\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i},$$

即

$$\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}[\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=2. \quad (4)$$

由于 q_i 为奇素数,则 $\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}$ 为奇数,同时 $\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)$ 也为奇数,因而(4)式不成立. 所以此时方程(1)无解.

情况 2.3　当 $\alpha\neq 0,\beta_i\neq 0,i=1,2,\cdots,s.$

此时,方程(1)为 $2^{k\alpha}\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i}-\varphi(2^{k\alpha}\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i})=2^{\alpha+1}\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i}$. 从而有

$$2^{k\alpha-1}\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i-1}[2\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=2^{\alpha+1}\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i}. \quad (5)$$

当 $k\alpha-1<\alpha+1$,即 $k=2$ 时,(5)式为 $2^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i-1}\left[\prod_{i=1}^{s}q_i-\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)\right]=1$. 由于 $\prod_{i=1}^{s}q_i-\frac{1}{2}\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)\geqslant 2$,因而此时无解.

当 $k\alpha-1\geqslant\alpha+1$ 时,(5)式为 $2^{(k-1)\alpha-2}\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}[2\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=1$. 由于 $2\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)$ 为偶数,这显然是不可能的.

因而,当 $P=2$ 时,除 $k=2,3$ 外,方程(1)无解. 若 $k=2$,则方程(1)只有解 $x=4$; 若 $k=3$,则方程(1)只有解 $x=2$.

情况 3　当 $P\geqslant 3$,且 P 是素数时,分为如下情况:

情况 3.1　当 $\alpha\neq 0,\beta_i=0,i=1,2,\cdots,s.$

此时有 $2^{k\alpha-1}=2^{\alpha}P$. 由于 P 为奇素数,则此时方程(1)无解.

情况 3.2　当 $\alpha=0,\beta_i\neq 0,i=1,2,\cdots,s.$

此时,方程(1)为 $\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i}-\varphi(\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i})=P\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i}$. 从而有

$$\prod_{i=1}^{s}q_i^{k\beta_i-1}[\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=P\prod_{i=1}^{s}q_i^{\beta_i},$$

即 $\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}[\prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)]=P.$

因而有

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}=P\\ \prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)=1\end{cases}\text{,或者}$$

$$\begin{cases}\prod_{i=1}^{s}q_i^{(k-1)\beta_i-1}=1\\ \prod_{i=1}^{s}q_i-\prod_{i=1}^{s}(q_i-1)=P\end{cases}. \quad (6)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

对于(6)式中的 $\begin{cases}\prod_{i=1}^{s} q_i^{(k-1)\beta_i-1} = P \\ \prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1) = 1\end{cases}$,有 $s=1,k=2,\beta_1=2,q_1=P$ 或 $s=1,k=3,\beta_1=1,q_1=P$.

当 $s=1,k=2,\beta_1=2,q_1=P$ 时,方程(1)有解 $x=P^2$;当 $s=1,k=3,\beta_1=1,q_1=P$ 时,方程(1)有解 $x=P$.

对于(6)式中的 $\begin{cases}\prod_{i=1}^{s} q_i^{(k-1)\beta_i-1} = 1 \\ \prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1) = P\end{cases}$ 是否有解,主要是由该方程组的第2个方程来决定,即判别 $\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)$ 的值是否一定是素数的问题,其中 q_i 为奇素数,$i=1,2,\cdots,s$. 当 $\prod_{i=1}^{s} q_i^{(k-1)\beta_i-1}=1$ 时,有 $(k-1)\beta_i=1$,从而有 $k=2,\beta_i=1$. 当 $s=1$ 时,显然 $\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)=1$,这与 $\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)=P$ 相矛盾,因而 $s\geqslant 2$. 由于 P 为素数,若 $\gcd(q_i,q_j-1)=q_i, i\neq j, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,s$,则 $\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)$ 一定为合数. 此时方程(1)有解 $x=\prod_{i=1}^{s} q_i$,其中 $q_i,q_j(i\neq j)$ 满足 $\gcd(q_i,q_j-1)=1, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,s$.

注:这里所说的 $x=\prod_{i=1}^{s} q_i$ 是方程(1)的解,其中 $q_i,q_j(i\neq j)$ 满足 $\gcd(q_i,q_j-1)=1, i=1,2,\cdots,s, j=1,2,\cdots,s$. 并不是说所有满足 $\gcd(q_i,q_j-1)=1$ 的 $x=\prod_{i=1}^{s} q_i$ 都是方程(1)的解,如 $3\times 23-2\times 22=25$ 为合数,而 $x=3\times 23=69$ 就不满足 $\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)=P$,$P$ 为素数.

情况 3.3 当 $\alpha\neq 0,\beta_i\neq 0, i=1,2,\cdots,s$.

此时,方程(1)为 $2^{k\alpha}\prod_{i=1}^{s} q_i^{k\beta_i} - \varphi(2^{k\alpha}\prod_{i=1}^{s} q_i^{k\beta_i}) = 2^{\alpha}P\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i}$. 从而有

$$2^{k\alpha-1}\prod_{i=1}^{s} q_i^{k\beta_i-1}\left[2\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)\right] = 2^{\alpha}P\prod_{i=1}^{s} q_i^{\beta_i},$$

即

$$2^{(k-1)\alpha-1}\prod_{i=1}^{s} q_i^{(k-1)\beta_i-1}\left[2\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)\right] = P. \quad (7)$$

由于 $2\prod_{i=1}^{s} q_i - \prod_{i=1}^{s}(q_i-1)$ 为偶数,则(7)式无解,此时方程(1)无解.

因而,当 $P\geqslant 3$ 且 P 是素数时,当 $k=2$ 时方程(1)有解 $x=P^2$;当 $k=3$ 时方程(1)有解 $x=P$. 整体可得结论.

参 考 文 献

[1] 许霞,徐小凡. 关于欧拉方程 $\varphi(ab)=2^k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2016,41(4):6-9.

[2] 官春梅,张四保. 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 有关的两个方程[J]. 数学的实践与认识,2016,46(9):221-225.

[3] 张四保,席小忠. 有关方程 $\varphi(ab)=k(\varphi(a)+\varphi(b))$ 的正整数解[J]. 南京师大学报:自然科学版,2016,39(1):41-47.

[4] 张四保. 三类包含 Euler 函数的方程[J]. 数学的实践与认识,2016,44(8):287-291.

[5] 张四保,刘启宽. 关于 Euler 函数一个方程的正整数解[J]. 东北师大学报:自然科学版,2015,47(3):49-54.

[6] 张四保,杜先存. 一个包含 Euler 函数方程的正整数解[J]. 华中师范大学学报:自然科学版,2015,49(4):497-501.

[7] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报:自然科学版,2008,38(2):173-176.

[8] 范盼红. 关于 F. Smarandache 函数和欧拉函数的三个方程[J]. 黑龙江大学自然科学学报,2012,29(5):626-628.

[9] Yuan Yi. An equation involving the Euler function and Smarandache function[J]. Scientia Magan, 2005, 1(2):172-175.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[10] 陈斌. 一类包含 Smarandache 函数的条件方程的可解性问题[J]. 西南大学学报: 自然科学版,2015,37(8):71-75.

[11] 刘艳艳. 数论函数方程 $\varphi(n)=S(n^k)$ 的非平凡解[J]. 青岛科技大学学报: 自然科学版,2014,35(4):326-329.

Positive Integer Solutions of Equation $x^k-\varphi(x^k)=Px$

Zhang Sibao[1]　Yang Zhenzhi[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar Xinjiang 844008;
2. China Railway Express Co. Ltd., Urumqi Branch, Urumqi Xinjiang 830011)

Abstract

The integer solutions of equation $x^k-\varphi(x^k)=Px$ are studied, where k and P are positive integers, and $k\geqslant 2$, $P=1$ or P is a prime. This function has solutions only when $k=2$, 3 are given, and the integer solutions of this equation are given by using elementary method.

Key words: Euler function $\varphi(n)$, equation, integer solutions.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net