DOI:10.19789/j.1004-9398.2016.03.004

关于两个可乘函数的均值*

王 明 军
(渭南师范学院数学与信息科学学院,陕西 渭南 714099)

摘 要

设 k 为给定的正整数,利用最大公约数定义数论函数 $f(n)=(n,k)$. 本文的主要目的是利用解析方法研究函数 $U(n,k)$ 和 $V(n,k)$ 的均值性质,并给出两个渐近公式. 结果表明这两个函数具有较好的均值分布性质.

关键词: 最大公约数,均值,渐近公式.
中图分类号: O156.4

1 引言及结论

数论函数 $U(n)$ 和 $V(n)$ 定义为: $U(1)=1$; $U(n)=\prod_{p|n}p$,其中 $\prod_{p|n}$ 表示对 n 的所有素因数求积. $V(1)=1$; 对任意素数 p 及正整数 α, $V(p^{\alpha})=p^{\alpha}-1$; 当正整数 n 的标准分解式为 $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 时, $V(n)=V(p_1^{\alpha_1})\cdots V(p_k^{\alpha_k})$. 关于 $U(n)$ 和 $V(n)$ 有许多研究结果: 如在文[1]中,作者利用解析方法研究了 $U(n)$, $V(n)$ 的均值性质,得到了 $\sum_{n\leqslant x}U(n)$ 和 $\sum_{n\leqslant x}V(n)$ 的渐近公式; 在文[2]中作者利用解析方法给出了 $\sum_{n\in A,n\leqslant x}U(n)$, $\sum_{n\in A,n\leqslant x}V(n)$ 的均值分布性质,其中 A 表示无 $k+1$ 次幂因子数所成的集合. 数论函数 $f(n)$ 定义为: $f(n)=(n,m)$,其中 (n,m) 表示 n 与 m 的最大公约数, $m>1$ 为给定的正整数. 与数论函数 $f(n)$ 有关的研究结果也有不少,文[3]中作者给出了两个渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma_{\alpha}(f(n))=\frac{\sigma_{1-\alpha}(m)}{m^{1-\alpha}}x+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(f(n))=x\frac{\varphi(m)}{m}\prod_{p^{\beta}\parallel m}\left(1+\beta-\frac{\beta-1}{p}\right)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

文[4]中作者给出了 $\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}d(n,m)$, $\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in A}}\sigma(n,m)$ 的渐近公式,其中 A 表示简单数序列.

本文的主要目的是用解析方法研究 $U(n,k)$ 和 $V(n,k)$ 的均值性质,其中 k 为给定的正整数, (n,k) 表示 n 与 k 的最大公约数,并给出两个渐近公式,即下面的定理:

定理1 对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 $k>1$, 则有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}U(n,k)=x\prod_{p^{\beta}\parallel k}\left(1+\frac{p-1}{p}+\frac{p(p-1)}{p^2}+\frac{p^2(p-1)}{p^3}\cdots+\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^{\beta}}\right)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

其中 $\prod_{p^{\beta}\parallel k}$ 表示对所有满足 p^{β} 整除 k 但 $p^{\beta+1}$ 不整除 k 的素数幂求积, ε 为任意给定的正数.

定理2 对任意实数 $x>1$ 及给定的正整数 $k>1$, 则有渐近公式:

$$\sum_{n\leqslant x}V(n,k)=x\prod_{p^{\beta}\parallel k}\left(1+\frac{p-2}{p}+\frac{p(p-1)}{p^2}+\frac{p^2(p-1)}{p^3}\cdots+\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^{\beta}}\right)+O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

其中 $\prod_{p^{\beta}\parallel k}$ 表示对所有满足 p^{β} 整除 k 但 $p^{\beta+1}$ 不整除 k 的素数幂求积, ε 为任意给定的正数.

2 定理的证明

首先证明定理1.

令 $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n,k)}{n^s}$,当 k 固定时, (n,k) 为 n 的可乘函数,同时也可证明 $U(n,k)$ 是 n 的可乘函数. 由 Euler 乘积公式[5]及 $U(n)$ 的定义有

收稿日期: 2015-03-22
* 陕西省自然科学基础研究计划项目(2014JM2-1004); 陕西省教育厅科研项目(15JK1262).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n,k)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{U(p,k)}{p^s} + \frac{U(p^2,k)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{U(p^m,k)}{p^{ms}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_{p\nmid k}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{ms}} + \cdots\right)\prod_{p^\beta \parallel k}\left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^\beta}{p^{\beta s}} + \frac{p^\beta}{p^{(\beta+1)s}}\cdots\right)$$

$$= \prod_{p\nmid k}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\prod_{p^\beta \parallel k}\left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{\beta-1}}{p^{(\beta-1)s}} + \frac{p^\beta}{p^{\beta s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

$$= \zeta(s)\prod_{p^\beta \parallel k}\left(\left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{\beta-1}}{p^{(\beta-1)s}}\right)\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) + \frac{p^\beta}{p^{\beta s}}\right)$$

$$= \zeta(s)\prod_{p^\beta \parallel k}\left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{p(p-1)}{p^{2s}} + \frac{p^2(p-1)}{p^{3s}}\cdots + \frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^{\beta s}}\right)$$

显然 $|U(n,k)| \leqslant M$, $\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U(n,k)}{n^s}\right| < \frac{M}{\sigma-1}$,其中 $\sigma > 1$ 为 s 的实部.

根据 Perron 公式[6] 有:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a(n)}{n^{s_0}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-it}^{b+it} f(s+s_0)\frac{x^s}{s}ds +$$

$$O\left(\frac{x^b B(b+\sigma_0)}{T}\right) + O\left(x^{1-\sigma_0}H(2x)\min\cdot\left(1,\frac{\log x}{T}\right)\right) + O\left(x^{-\sigma_0}H(N)\min\left(1,\frac{x}{T\parallel X\parallel}\right)\right).$$

其中 N 为离 x 最近的整数,当 x 为半奇数时取 $N = x - \frac{1}{2}$, $\parallel x\parallel = |x-N|$.

在上式中取 $a(n) = U(n,k)$, $s_0 = 0$, $b = 2$, $T = x^{\frac{3}{2}}$, $H(x) = M$, $B(\sigma) = \frac{M}{\sigma-1}$, 则有

$$\sum_{n\leqslant x}U(n,k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}ds + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

其中 $R(s) = \prod_{p^\beta\parallel k}\left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{p(p-1)}{p^{2s}} + \frac{p^2(p-1)}{p^{3s}}\cdots + \frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^{\beta s}}\right)$.

为了估计其主项 $\frac{1}{2\pi i}\int_{2-iT}^{2+iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}ds$,将积分限从 $s = 2\pm iT$,移到 $s = \frac{1}{2}\pm iT$. 这时,函数 $\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}$ 在 $s = 1$ 处有简单极点其留数为 $R(1)x$.

即 $$\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2-iT}^{2+iT} + \int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}ds = R(1)x.$$

容易估计

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT}\right)\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}ds\right|$$

$$\ll \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left|\zeta(\sigma+iT)R(s)\frac{x^2}{T}\right|d\sigma \ll \frac{x^2}{T} = x^{\frac{1}{2}};$$

利用分部积分法可得

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}+iT}^{\frac{1}{2}-iT}\zeta(s)R(s)\frac{x^s}{s}ds\right|$$

$$\ll \int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)R(s)\frac{x^{\frac{1}{2}}}{t}\right|dt \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

由以上关系式则得

$$\sum_{n\leqslant x}U(n,k) = x\prod_{p^\beta\parallel k}\left(1 + \frac{p-1}{p} + \frac{p(p-1)}{p^2} + \frac{p^2(p-1)}{p^3}\cdots + \frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^\beta}\right) + O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

这样就完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明.

令 $g(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V(n,k)}{n^s}$,可证明 $V(n,k)$ 是 n 的可乘函数. 由 Euler 乘积公式及 $V(n)$ 的定义有

$$g(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V(n,k)}{n^s} = \prod_p\left(1 + \frac{V(p,k)}{p^s} + \frac{V(p^2,k)}{p^{2s}} + \cdots + \frac{V(p^m,k)}{p^{ms}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_{p\nmid k}\left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{1}{p^{ms}} + \cdots\right)\prod_{p^\beta\parallel k}\left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{p^2-1}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^\beta-1}{p^{\beta s}} + \frac{p^\beta-1}{p^{(\beta+1)s}} + \cdots\right)$$

$$= \prod_{p\nmid k}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)\prod_{p^\beta\parallel k}\left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \cdots + \frac{p^{\beta-1}}{p^{(\beta-1)s}} + \frac{p^\beta}{p^{\beta s}}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} - \frac{1}{p^s}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$= \zeta(s)\prod_{p^{\beta}\parallel k}\left(\left(1+\frac{p}{p^{s}}+\frac{p^{2}}{p^{2s}}+\cdots+\frac{p^{\beta-1}}{p^{(\beta-1)s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^{s}}\right)+\frac{p^{\beta}}{p^{\beta s}}-\frac{1}{p^{s}}\right)$$

$$= \zeta(s)\prod_{p^{\beta}\parallel k}\left(1+\frac{p-2}{p^{s}}+\frac{p(p-1)}{p^{2s}}+\frac{p^{2}(p-1)}{p^{3s}}\cdots+\frac{p^{\beta-1}(p-1)}{p^{\beta s}}\right)$$

然后对 $g(s)$ 应用 Perron 公式,并按照定理 1 的　　证明方法,我们可以证明定理 2.

参 考 文 献

[1] 刘华宁. 两个均值公式 [J]. 宁夏大学学报(自然科学版),2006,27(1):15 - 17.

[2] 马元魁,张天平. 无 k + 1 次幂因子数的两个渐近公式 [J]. 黑龙江大学自然科学学报,2010,27(1):60 - 63.

[3] 徐哲峰. 一些新的数论函数及其均值 [J]. 数学的实践与认识,2006,36(8):300 - 303.

[4] 高楠. 关于简单数及其它的性质 [J]. 延安大学学报(自然科学版),2003,22(3):5 - 8.

[5] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spring Verlag,1976.

[6] 潘承洞,潘承彪. 解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社,1999:97.

[7] 王明军. 关于简单数序列的一些研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2011,36(3):14 - 17.

[8] 黄炜,赵教练. 关于 Smarandache 平方根部分数列 $a_2(n)$ 和 $b_2(n)$ [J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2010,27(6):52 - 54.

[9] 王明军. 一个 Smarandache 数列及其均值性质 [J]. 首都师范大学学报(自然科学版),2015,36(1):10 - 12.

On the Mean Value of Two Multiplicative Functions

Wang Mingjun

(Department of Mathematics and Information Science, WeinanTeachers University, Weinan Shannxi　714099)

Abstract

Let k be a positive integer, the arithmetical function $f(n) = (n,k)$ was defined by greatest common divisor. The main purpose of this paper is using the analytic method to study the mean value properties of $U(n,k)$ and $V(n,k)$, and obtain two interesting asymptotic formula. The results show that these two different functions have good distributive properties.

Key words: Greatest common divisor, Mean value property, Asymptotic formula.

作者简介　王明军(1972 -),男,陕西合阳人,渭南师范学院数学与信息科学学院副教授.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net