DOI:10.19789/j.1004-9398.2019.02.003

从 Lebesgue 测度看 $\mathbf{R}^2$ 中图形的面积*

余玉峰[1] 石冶郝[2**] 孙 颖[3]

(1. 山西师范大学现代文理学院,山西 临汾 041000;2. 首都师范大学初等教育学院,北京 100048;
3. 湖南省邵阳市大祥区祥凤实验学校,湖南 邵阳 422000)

摘 要

从初等数学到高等数学,面积是一个逐步深入的概念,而且在实变函数课程之前都没有一个统一严密的的定义. 实变函数课程第一次把面积统一在测度之内,并给出了严格的定义. 本文阐述 $\mathbf{R}^2$ 中面积和测度的关系,从测度角度去认识面积,使读者体会到 $\mathbf{R}^2$ 中测度不再是一个抽象的定义,而是继面积之后自然而然出现的数学对象.

关键词: 面积; Lebesgue 测度

中图分类号: O174

0 引 言

面积是数学的基本研究对象. 在初等数学中学生从直观上感受了一些常见的规则图形的面积,如三角形,平行四边形,梯形[1,第6章,85~104页]及圆[2,第5章,57~78页]等.

到了高等数学,学生需要计算不规则图形的面积. 在数学分析中采用 Riemann 定积分的方法给出一些特殊图形面积的定义. 但这种方法仍有局限性,后来又提出了可求面积的定义. 这就极大地推广了面积的定义,使很多不规则的图形都具有了确定的面积. 但问题又出现了,一些不太特殊的不规则几何图形仍然没有面积的定义,例如

问题1 如果设 A 为 $[0,1]\times[0,1]$ 中的有理点构成的集合,B 为 $[0,1]\times[0,1]$ 中的无理点构成的集合,那么 A 和 B 有没有面积呢? 如果有,是多少?

类似的集合还有很多,例如可数集等. 要解决这些问题,用可求面积的定义及 Riemann 定积分的定义已经不够了. 因此,这迫使人们不得不重新思考面积. 于是,在实变函数中采用更广泛的 Lebesgue 测度来代替面积的定义. 从而一些复杂的几何图形都可以计算"面积",问题1就迎刃而解.

本文的目的是使读者对 $\mathbf{R}^2$ 中图形的面积有一个深入的认识,要说明的结论是 Lebesgue 测度是目前"面积"定义最大的推广. 本文的安排遵循由特殊到一般,由简单到复杂的思路. 首先,回顾 $\mathbf{R}^2$ 中规则图形的面积,这要追溯到正方形面积. 其次,介绍 $\mathbf{R}^2$ 中一些不规则图形面积的定义及计算方法. 最后介绍 $\mathbf{R}^2$ 中一般图形面积的推广——Lebesgue 测度,并指出 $\mathbf{R}^2$ 中的一些 Lebesgue 可测集类的测度与"面积"的关系.

1 $\mathbf{R}^2$ 中图形的面积

1.1 $\mathbf{R}^2$ 中规则图形的面积

正方形的面积等于其边长的平方(参见[1],87~89页),这个公式不是证明出来的,而是一种约定. 有了这个约定,就可以得到 $\mathbf{R}^2$ 中很多规则图形的面积. 例如长方形的面积由正方形的面积推出;平行四边形的面积由长方形的面积推出;梯形的面积由平行四边形的面积推出;三角形的面积由平行四边形的面积推出. 多边形的面积由三角形的面积推出;以及由长方形、平行四边形、梯形、三角形经过有限次组合而得到的图形的面积都可以计算出来.

如果把极限的思想运用到图形面积的定义中,就可以得到圆面积的计算公式,见割圆术([3],191

收稿日期: 2018-05-04

* 国家自然科学基金项目(11601352)

** 通信作者: yehaoshi@cnu.edu.cn

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

页;4]). 由圆面积可得扇形面积的计算公式.

最后由长方形(正方形)、平行四边形、梯形、三角形、圆和扇形经过有限次组合而得到的图形的面积都可以计算出来. 这些规则图形或规则图形的有限次组合而得的图形面积是确定的，也能计算出来，主要原因是 $\mathbf{R}^2$ 中正方形面积的约定.

1.2　$\mathbf{R}^2$ 中不规则图形的面积

下面，考察 $\mathbf{R}^2$ 中不规则图形的面积. 首先研究几个特殊的不规则图形的面积. 如图 1，连续曲线 $y=f(x)\geqslant 0$ 在 $[a,b]$ 上形成的曲边梯形的面积为 $S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ [5，202～205 页]，这里的积分是 Riemann 定积分，也就是说曲边梯形的面积是通过 Riemann 定积分定义的，即通过分割、近似代替、求和、取极限四步得到. 类似的，如图 2，由上下两条连续曲线 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ $(f_1(x)\leqslant f_2(x),a\leqslant x\leqslant b)$ 以及两直线 $x=a$ 与 $x=b$ 所围成的图形面积为 $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x$ [5，243 页].

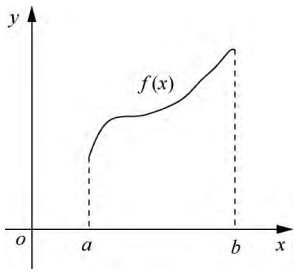


图 1

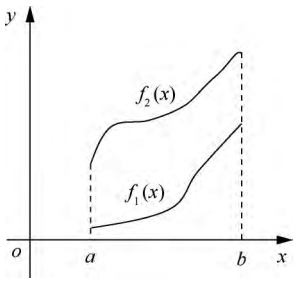


图 2

对于一般不规则图形的面积，先给出可求面积的定义 [5，223 页]. 设 P 是一平面有界图形，用某一平行于坐标轴的一组直线网 T 分割这个图形. 这时，直线网 T 的网眼 ——小闭矩形 Δ_i 可分为三类:

(i) Δ_i 上的点都是 P 的内点;

(ii) Δ_i 上的点都是 P 的外点，即 $\Delta_i\cap\overline{P}=\phi$;

(iii) Δ_i 上含有 P 的边界点.

将第(i)类小矩形的面积加起来，记这个和数为 $s_P(T)$；将第(ii)类和第(iii)类小矩形的面积加起来，记这个和数为 $S_P(T)$. 令

$$\underline{I}_P=\sup_T\{s_P(T)\},\ \overline{I}_P=\inf_T\{S_P(T)\},\quad (1.1)$$

则 $\underline{I}_P$ 称为 P 的内面积，$\overline{I}_P$ 称为 P 的外面积. 若平面图形 P 的内面积 $\underline{I}_P$ 等于它的外面积 $\overline{I}_P$，则称 P 为可求面积的，并称其共同值 $I_P=\underline{I}_P=\overline{I}_P$ 为 P 的面积.

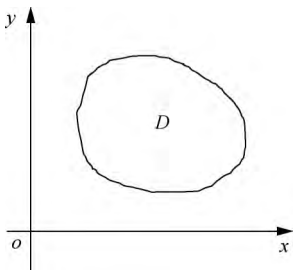


图 3

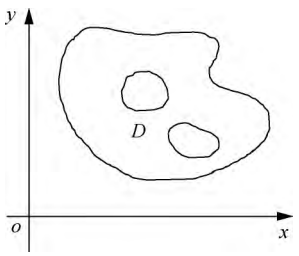


图 4

根据可求面积的定义，可以证明上述两类不规则图形是可求面积的. 此外，单连通区域和多连通区域都是可求面积的，见图 3、图 4 中的区域 D.

这样，很多不规则图形的面积就有了准确定义. 并非平面中所有的点集都是可求面积的，如问题 1 中的图形 A，见如下命题.

命题 1.1　问题 1 中的图形 A 是不可求面积的.

证明: 首先，图形 A 无内点. 所以 A 被平行于坐标轴的一组直线网 T 分割以后(见图 5)，直线网 T 的网眼只有第(ii)类和第(iii)类小闭矩形 Δ_i. 所以第(i)类小矩形的面积和为零，即 $s_A(T)=0$. 因此 A 的内面积

$$\underline{I}_A=\sup_T\{s_A(T)\}=0.$$

容易看出正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 内和边界上的小矩形都含有 A 的边界点，$[0,1]\times[0,1]$ 外(不包括边界)的小矩形内的点全是 A 的外点. 由此可得 A 的外面积为

$$\overline{I}_A=\inf_T\{S_A(T)\}=|[0,1]\times[0,1]|=1.$$

因为 $\underline{I}_A\neq\overline{I}_A$，所以 A 是不可求面积的.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

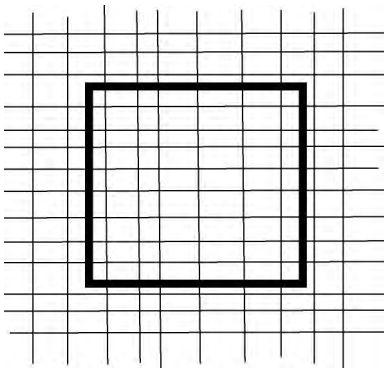


图5

若使问题 1 中的图形 A 具有面积，“面积”定义还需要进一步推广，这个推广就是下面的 Lebesgue 测度.

2 $\mathbf{R}^2$ 中的 Lebesgue 测度

事实上，经常使用的面积应满足类似于长度公理(见 [7,53 页]) 的面积公理.

公理(面积公理) 设 $\mathbf{R}^2$ 中的一些点集所构成的集合族 μ，对于每个 $E \in \mu$，都对应一个实数 m，使得

(1) (非负性) $m(E) \geqslant 0$;

(2) (有限可加性) 如果 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 两两不相交，那么 $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$;

(3) (正则性) $m([0,1] \times [0,1]) = 1$.

因此要解决问题 1，必须要修改面积公理. 面积公理中的(1) 和(3) 是不能修改的，因为修改后与习惯不符. 因此只有修改(2). 将(2) 的有限可加性改为可列可加性，就得到如下的 Lebesgue 测度公理.

公理 2.2 ([7,54 页],Lebesgue 测度公理) 设 $\mathbf{R}^2$ 中的一些点集所构成的集合族 μ，对于每个 $E \in \mu$，都对应一个实数 m，使得

(1) (非负性) $m(E) \geqslant 0$;

(2) (可列可加性) 如果 $E_1, E_2, \cdots, E_n \cdots$ 两两不相交，那么 $m(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} m(E_i)$;

(3) (正则性) $m([a,b] \times [a,b]) = (b-a)^2$.

注: 可列可加性包含有限可加性的情况，只要令 $m(\phi) = 0$ 即可.

下面在 R^n 中寻找一集合类 μ，在 μ 上满足 Lebesgue 测度公理. 因为在 Lebesgue 测度公理中出现了集合的可数并运算，所以 μ 对集合的可数并运算是封闭的. 自然地，要求 μ 对集合的作交及作差运算也是封闭的. 而满足卡拉泰奥多里条件的 Lebesgue 外测度正好能满足这一要求. 下面来看 Lebesgue 外测度(见 [7,56 页; 8,10 页]) 的定义.

设 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中任一点集，对于每一列覆盖 E 的开区间 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Leftrightarrow E$ (某些 I_i 可以是空集)，作出它的体积总和 $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ (μ 可以等于 $+\infty$，不同的区间列一般有不同的 μ). 所有这一切的 μ 组成一个下方有界的数集，它的下确界(完全由 E 确定) 称为点集 E 的 Lebesgue 外测度，简称 L 外测度或外测度，记为 $m^* E$，即

$$m^* E = \inf_{E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|.$$

设 E 为 $\mathbf{R}^2$ 中的点集，并且对任一点集 T 都有

$$m^* T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c). \quad (2.1)$$

等式 (2.1) 称为卡拉泰奥多里条件([7,62 页; 9,127 页]).

记 μ 为 $\mathbf{R}^2$ 中所有满足(2.1) 的点集 E 构成的集合，m 为满足(2.1) 的外测度 m^*，则 m 和 μ 满足一系列性质，例如 μ 对集合的可数并、作交及作差运算是封闭的，m 在 μ 上满足可数可加性等. 因此 μ 和 m 就是要找的集合类及满足 Lebesgue 测度公理的新的“面积”. 此时，称 μ 中的集合 E 是 Lebesgue 可测集，简称 L 可测集或可测集，E 的外测度 $m^* E$ 称为 E 的 Lebesgue 测度，简称 L 测度或测度，记作 mE([7,62 页]). 最后记 Lebesgue 可测集构成的集合为 μ.

Lebesgue 测度除了以上的定义法，还有一种内填外包的定义法(这时要引入内测度)，见 [10,38~42 页] 中第 2.3 节，但这两种定义是等价的，见 [7,324 页].

3 $\mathbf{R}^2$ 中 Lebesgue 测度与面积的关系

在这一节，我们将说明 Lebesgue 测度与以前面积相比的优越性，以及它们之间的关系.

3.1 规则图形

我们先来看 R^n 中区间的定义. R^n 中集合的直积 $\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$，$\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$，$\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i)$，$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

分别称为开区间，闭区间，半开半闭区间，它们都称为区间. $|I| = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ 称为区间 I 的体积. 易知在 $\mathbf{R}^2$ 中区间是矩形区域，区间的体积就是矩形区域的面积.

$\mathbf{R}^2$ 中的所有矩形区域都是可测集，且它们的面积等于它们的测度，见[7,67 页]中定理 2.

推论 3.1　$\mathbf{R}^2$ 中的平行四边形区域是可测集，且它们的面积等于它们的测度.

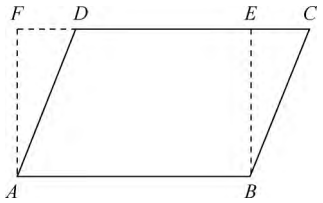


图 6

证明: 如图 6. 设 G 表示平行四边形 $ABCD$ 所在的区域，$\bar{G}$ 表示 G 的闭包，$\mathring{G}$ 表示 G 的内部，则 $\bar{G}$ 和 $\mathring{G}$ 都是可测集. 过点 B 作 BE 垂直于 CD 交 CD 于 E，过点 A 作 AF 垂直于 CD 交 CD 的延长线于 F. 将 ΔBCE 平移到 ΔADF，则四边形 $ABEF$ 是矩形. 设 H 表示矩形 $ABEF$ 所在的区域，则 $\bar{H}$ 和 $\mathring{H}$ 都是可测的，且它们的测度都等于矩形 $ABEF$ 的面积，又等于平行四边形 $ABCD$ 的面积即 G 的面积.

由于 Lebesgue 测度具有平移不变性，所以 $\bar{G}$ 和 $\mathring{G}$ 的测度分别等于 $\bar{H}$ 和 $\mathring{H}$ 的测度，即 G 的面积. 又因为 $\mathring{G} \subset G \subset \bar{G}$，所以 G 可测，且 G 的测度等于 G 的面积.

类似可得 $\mathbf{R}^2$ 中的其它规则图形(如平行四边形、梯形等)以及由这些规则图形经过可数次组合而得到的图形区域都是可测集，而且它们的面积等于它们的测度.

3.2　可求面积的图形

$\mathbf{R}^2$ 中可求面积的图形区域也是可测集，见如下定理.

定理 3.2　在 $\mathbf{R}^2$ 中可求面积的图形是可测集，而且它的测度等于它的面积.

证明定理 3.2 之前，我们先给出一个引理.

引理 3.3　在 $\mathbf{R}^2$ 中面积为零的图形是可测集，而且它的测度等于零.

证明: 设 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中面积为零的图形，用平行于坐标轴的一组直线网 T 分割 P. 直线网 T 的网眼——小闭矩形 Δ_i 可分为三类(见本文 1.2 节中可求面积的定义). 记第(i)类小矩形的面积和为 $s_P(T)$，第(ii)类和第(iii)类小矩形的面积和为 $S_P(T)$，且 $\bar{I}_P$ 为 P 的外面积. 由于 P 是可求面积且面积为零，所以

$$\bar{I}_P = \inf_T\{S_P(T)\} = 0 \qquad (3.1)$$

记第(ii)类和第(iii)类闭矩形为 $\Delta_i, i = 1,2,\cdots$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 总存在开区间 I_i，使得

$$\Delta_i \subset I_i, |I_i| < |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

从而 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\Delta_i| + \varepsilon = S_P(T) + \varepsilon.$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及 $m^*(P)$ 的定义得

$$m^*(P) \leqslant S_P(T). \qquad (3.2)$$

所以由(3.1)和(3.2)可得: $m^*(P) \leqslant \bar{I}_P = 0.$

从而 P 是可测集，且它的测度等于零.

定理 3.2 的证明: 将(1.1)式中的 P 换为 $\bar{P}$ 或 $P\backslash\partial P$($\bar{P}$ 为 P 的闭包，∂P 为 P 的边界)后，我们可得

$$\bar{I}_P = \bar{I}_P = \bar{I}_{P\backslash\partial P}, \bar{I}_P = \bar{I}_P = \bar{I}_{P\backslash\partial P}.$$

因此若 P 是可求面积的，则 $\bar{P}$ 和 $P\backslash\partial P$ 也是可求面积的. 由 P 是可求面积的知 P 的边界的面积为零(见[6,224 页]的定理 21.2). 由引理 3.3 得

$$m(\bar{P}\backslash(P\backslash\partial P)) = m(\partial P) = 0.$$

而 $\bar{P}$ 和 $P\backslash\partial P$ 分别是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集和开集，因而可测. 又 $P\backslash\partial P \subset P \subset \bar{P}$，所以 P 是 $\mathbf{R}^2$ 中的可测集. 下面分两步完成定理 3.2 的证明.

(i)　设直线网 T 分割 P 时，第(ii)类和第(iii)类闭矩形为 $\Delta_i, i = 1,2,\cdots$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 总存在开区间 I_i，使得 $\Delta_i \subset I_i, |I_i| < |\Delta_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}$. 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|\Delta_i| + \varepsilon = S_P(T) + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及 $m^*(P)$ 的定义知

$$m^*(P) \leqslant S_P(T).$$

所以

$$m^*(P) \leqslant \inf_T\{S_P(T)\} = \bar{I}_P = I_P.$$

(ii)　设直线网 T 分割 P 时，第(i)类闭矩形为 $\Delta_i, i = 1,2,\cdots$; I_i 为覆盖 P 的任一列开区间，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_i \subset P \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}I_i.$$

因而 $\bar{P} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bar{I}_i$. 对任意 $\varepsilon > 0$ 总存在开区间 I'_i，使得

$$\bar{I}_i \subset I'_i, |I'_i| < |\bar{I}_i| + \frac{\varepsilon}{2^i} = |I_i| + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

从而 $\bar{P} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I'_i$. 由于 $\bar{P}$ 是有界闭集及有限覆盖定理知 $\{I'_i\}$ 中存在有限个开区间覆盖 $\bar{P}$，不妨设 $\bar{P} \subset \bigcup_{i=1}^{k_0} I'_i$. 从而对任意正整数 k，

$$\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_i \subset P \subset \bigcup_{i=1}^{k_0} I'_i.$$

由平面几何的知识可知 $\sum_{i=1}^{k} |\Delta_i| \leqslant \sum_{i=1}^{k_0} |I'_i|$. 令 $k \to \infty$ 得

$$s_P(T) = \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_i| \leqslant \sum_{i=1}^{k_0} |I'_i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \varepsilon.$$

因此

$$\sup_T \{s_P(T)\} \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| + \varepsilon.$$

进而

$$\sup_T \{s_P(T)\} \leqslant \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| : \{I_i\}$$

是 $\mathbf{R}^2$ 中覆盖 P 的任一开区间列$\} + \varepsilon$，即

$$\bar{I}_P \leqslant m^*(P) + \varepsilon.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性得，$I_P = \bar{I}_P \leqslant m^*(P)$.

故由(i)和(ii)知，$I_P = m^*(P) = m(P)$.

注：在 $\mathbf{R}^2$ 中，可求面积的图形是可测集，但可测集(图形)不一定是可求面积的，见命题 1.1.

3.3 其他图形

从以上讨论可知 $\mathbf{R}^2$ 中的规则图形及由规则图形经过可数次组合所得的图形，可求面积的图形都是 Lebesgue 可测集，并且它们的“面积”就等于它们的 Lebesgue 测度. Lebesgue 测度的定义极大地推广了“面积”定义，使简单的和很多复杂的几何图形面积都有了准确定义，例如有限集，可数集，开集，闭集，G_δ 型集，F_σ 型集等(见[7]，第 3 章第 3 节，67～71 页])．尽管 Lebesgue 不可测集(见[7]，第 3 章第 4 节，71～74 页])仍然存在，但 Lebesgue 测度是目前“面积”最大的推广.

对于高维空间中的低维测度目前还处于研究中，因此高维空间中的“面积”缺乏像 Lebesgue 测度一样广泛的定义. 另外，面积除了 Lebesgue 测度外还有其它的测度，见[11，第 7.7 节，336～350 页]和[9，第 3 章第 10 节，125～148 页].

3.4 问题 1 的解

由可测集的定义知单点集的测度为零，从而由可测集的可数可加性得有限集和可数集的测度为零(见[7，64 页])．由于在问题 1 中，集合 A 是可数集，因此 $m(A) = 0$. 从而由测度的有限可加性知 $m(B) = m([0,1] \times [0,1]) - m(A) = 1 - 0 = 1$. 这样用测度代替面积以后，轻松解决了问题 1.

参 考 文 献

[1] 人民教育出版社课程教材研究所小学数学课程教材研究开发中心. 义务教育教科书数学五年级上册[M]. 北京：人民教育出版社，2014.

[2] 人民教育出版社课程教材研究所小学数学课程教材研究开发中心. 义务教育教科书数学六年级上册[M]. 北京：人民教育出版社，2014.

[3] 郭书春. 九章算术[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，1990.

[4] 郭书春. 关于刘徽的割圆术[J]. 高等数学研究，2007(1)：118－120.

[5] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2010.

[6] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册)[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2010.

[7] 程其襄，张奠宙，魏国强，等. 实变函数与泛函分析基础[M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2010.

[8] STEIN E M，SHAKARCHI R. Real analysis，princeton lectures in analysis [M]. Princeton and Oxford：Princeton University Press，2005.

[9] HEWITT E，STROMBERG K. Real and abstract analysis [M]. Berlin Heidelberg：Springer-Verlag，1975.

[10] OVCHINNIKOV S. Measure，integral，derivative a course on Lebesgue´s theory [M]. New York：Sringer Science + Business Media，2013.

[11] HOFFMAN K. Analysis in euclidean space [M]. New Jersey：Englewood Cliffs，1975.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Viewing the Area of Graphs in R^2 in Terms of Lebesgue Measure

YU Yufeng[1] SHI Yehao[2] SUN Ying[3]

(1. Modern College of Humanities and Sciences, Shanxi Normal University, Linfen Shanxi 041000;
2. Elementary Educational College, Capital Normal University, Beijing 100048;
3. Xiang Feng Experimental School of Daxiang District, Shaoyang Hunan 422900)

Abstract

From elementary mathematics to advanced mathematics, the concept of area is a consecutively deepened notion. There is no uniform, rigorous definition before the course Functions of Real Variables, which comprised the concept of area into the notion of measure, and gave a strict definition for the first time. This article explained the relationship between area and measure in $\mathbf{R}^2$ and approached the concept of area from the viewpoint of measure. Readers will be convinced that measure in $\mathbf{R}^2$ is no longer an abstract definition, but a mathematical object that comes naturally after area.

Keywords: area; measure

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net