DOI:10.19789/j.1004-9398.2015.03.002

径向对称的拟线性热方程的演化不变集及其精确解*

屈改珠

(渭南师范学院数学与信息科学学院,陕西 渭南 714000)

摘 要

利用函数不变集理论,讨论了径向对称的 N 维拟线性热方程的演化不变集和精确解,给出了径向对称的拟线性热方程在伸缩群上不变时满足的约束条件,求解约束条件得到了上述方程的一些精确解.

关键词: 径向对称的拟线性热方程,伸缩不变集,精确解.

中图分类号: O175.29

1 引言以及方法介绍

本文利用演化不变集的方法,研究径向对称的 N 维拟线性热方程

$$u_t = A(u)\Delta u + B(u)\,|\nabla u|^2 + Q(u), \quad (1)$$

方程(1)被用于描述非牛顿液体、湍流等物理现象,其中 $x > 0$ 是径向空间变量,$\Delta u = u_{xx} + \frac{N-1}{x}u_x$,$|\nabla u|^2 = (u_x)^2$.

演化不变集方法最初由 Galaktionov 提出,在文[1-2]中,Galaktionov 通过引入演化不变集 $S_0 = \{u: u_x = (1/x)F(u)\}$ 作为伸缩群的推广构造了一般的演化方程 $u_t = E(x,u,u_x,u_{xx},\cdots,u^{(k)})$ 的精确解,其中 $u^{(k)}$ 是 u 关于 x 的 k 阶导数. 屈长征教授和 P. G. Estevez 在文[3-4]中给出了一般形式的不变集

$$S_1 = \{u: u_x = \frac{1}{x}F(u) + \varepsilon F(u)\cdot [\exp(n-1)\int^u \frac{1}{F(z)}dz]\}$$

作为旋转不变集 S_0 的推广讨论了高阶非线性演化方程的精确解. 文献[5-8]进一步将这种方法推广,得到了很多有意义的结果.

本文通过建立伸缩不变集 $S_0 = \{u: u_x = (1/x)F(u)\}$ 来研究径向对称的拟线性热方程(1),其中 $A(u)$ 是扩散系数,$B(u)$,$Q(u)$ 分别是对流项和热源项,它们均是 u 的足够光滑的函数.

2 主要结果

引入伸缩不变集 $S_0 = \{u: u_x = (1/x)F(u)\}$,其中 F 是由不变条件 $u(x,0) \in S_0 \Rightarrow u(x,t) \in S_0$,$t \in (0,1]$ 所确定的函数. 当 $u \in S_0$ 时,方程有形如

$$\int^u \frac{1}{F(u)}du = \ln x + h(t) \quad (2)$$

的解. 在 S_0 中,有下列公式成立

$$u_x = \frac{1}{x}F(u), \quad u_{xx} = -\frac{1}{x^2}F + \frac{1}{x^2}FF'. \quad (3)$$

假定方程(1)在函数集合 S_0 中不变,把(3)代入(1),则有

$$h' = \frac{1}{x^2}[AF' + (N-2)A + BF] + \frac{Q}{F}. \quad (4)$$

该式左端与 x 无关,对它两端分别关于 x 求偏导,得

$$-\frac{2}{x^3}[AF' + (N-2)A + BF] + \frac{1}{x^3}[AF' + (N-2)A + BF]'F + \frac{1}{x}\left(\frac{Q}{F}\right)'F = 0$$

由上述方程,得到方程(1)中系数的约束条件:

$$AF' + (N-2)A + BF = 0, \quad \frac{Q}{F} = c_1.$$

其中 c_1 及下文中的 c_i $(i = 2,3)$ 均为常数,$h(t)$ 满足 $h(t) = c_1 t + c_2$. 为了方便,我们取下面 5 种情况分

收稿日期: 2014-01-20

* 国家自然科学基金资助项目(11371293);陕西省军民融合研究基金项目(13JMR13);陕西省教育厅基金项目(14JK1246);陕西省重点学科数学学科基金项目(14SXZD015);渭南市基础研究计划项目(2013JCYJ-4).

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

别作以讨论:

(1) 令 $A = u^m$, $F = u$, 则 $B = u^{m-1} - Nu^{m-1}$, $Q = c_1 u$. 方程

$$u_t = u^m \Delta u + (u^{m-1} - Nu^{m-1}) \mid \nabla u \mid^2 + c_1 u$$

有解 $u = c_3 x e^{c_1 t}$.

(2) 令 $A = u^m$, $F = u^k (k \neq 1)$, 则 $B = -ku^{m-1} + (2 - N) u^{m-k}$, $Q = c_1 u^k$. 方程

$$u_t = u^m \Delta u + [-ku^{m-1} + (2 - N) u^{m-k}] \mid \nabla u \mid^2 + c_1 u^k$$

有解 $u = [(1 - k)(\ln x + c_1 t + c_3)]^{\frac{1}{1-k}}$.

(3) 令 $A = u^m$, $F = e^u$, 则 $B = -u^m + (2 - N) u^m e^{-u}$, $Q = c_1 e^u$. 方程

$$u_t = u^m \Delta u + [-u^m + (2 - N) u^m e^{-u}] \mid \nabla u \mid^2 + c_1 e^u$$

有解 $u = -\ln[-(\ln x + c_1 t + c_3)]$.

(4) 令 $A = e^u$, $F = u^k (k \neq 1)$, 则 $B = [-ku^{-1} + (2 - N) u^{-k}] e^u$, $Q = c_1 u^k$. 方程

$$u_t = e^u \Delta u + [-ku^{-1} + (2 - N) u^{-k}] e^u \mid \nabla u \mid^2 + c_1 u^k$$

有解 $u = [(1 - k)(\ln x + c_1 t + c_3)]^{\frac{1}{1-k}}$.

(5) 令 $A = \frac{1}{1 + u^2}$, $F = e^u$, 则 $B = -\frac{1}{1 + u^2}[1 + (N - 2) e^{-u}]$, $Q = c_1 e^u$. 方程

$$u_t = \frac{1}{1 + u^2} \Delta u + \frac{1}{1 + u^2}[-1 + (2 - N) e^{-u}] \cdot \mid \nabla u \mid^2 + c_1 e^u$$

有解 $u = -\ln[-(\ln x + c_1 t + c_3)]$.

3 结束语

本文讨论了径向对称的拟线性热方程的伸缩不变集及其精确解,值得我们思考的问题是:能否构造更一般形式的不变集 $M = \{u: u_x = G(x, t, u)\}$,并利用它求更多的非线性偏微分方程的精确解,这是在未来的研究中我们要考虑的问题.

参 考 文 献

[1] Galationov V A. Groups of scaling and invariant sets for higher-order nonlinear evolution equations [J]. Diff Integer Equation, 2001, 14: 913 – 924.

[2] Galationov V A. Ordered invariant sets for nonlinear equations of KdV-type. Com-pute [J]. Math phys, 1999, 39: 1564 – 1570.

[3] Qu Changzheng, Estevez P G. Extended rotation and scaling groups for nonlinear evolution equations [J]. Nonlinear Anal, 2003, 52: 1655 – 1673.

[4] Qu Changzheng. Symmetries and solutions to the thin film equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 317: 381 – 397.

[5] Qu Changzheng, Zhu Chunrong. Invariant sets and solutions to the generalized thin film equations [J]. Sci China A, 2007, 37: 447 – 458.

[6] Qu Gaizhu, Zhang Shunli, Zhu Chunrong. Invariant Sets and Exact Solutions to Higher-dimensional Wave Equations [J]. Commun Theor Phys, 2008, 49(5): 1119 – 1124.

[7] 屈改珠. (1+1)维带有热源项的非线性波动方程的精确解 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2012, 42(6): 882 – 884.

[8] 屈改珠, 张同琦, 余保民. 利用函数不变集方法求解 KdV 型方程 [J]. 工程数学学报, 2013, 30(3): 400 – 406.

The Evolutionary Invariant Sets and Explicit Solutions to Radially Symmetric Quaslilinear Heat Equation

Qu Gaizhu

(College of Mathematics and Information Science, Weinan Normal University, Weinan Shannxi 714000)

Abstract

In this paper, we discuss the scaling invariant sets and explicit solutions to radially symmetric quaslilinear heat equation in $\mathbb{R}^N$ by using the invariant sets , and derive the invariant conditions for the radially symmetric quaslilinear heat equation in $\mathbb{R}^N$ under the scaling group , furthermore, we construct the invariant solutions to by solving these constraints.

Key words: Radially symmetric quaslilinear heat equation, Scaling invariant set, Explicit solution.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net