拓扑超导体与量子点结构中非简并能级的全计数统计

王　静，郭健宏*

(首都师范大学物理系，北京　100048)

摘要:利用占据数方程研究拓扑超导体与量子点中非简并能级的全计数统计.在有限温度与偏压下,将计数统计的各阶累计矩表示为特征多项式的各项系数及其导数.通过计数统计,Majorana费米子总是导致微分电导峰,与费米子宇称是否简并无关.在大偏压区,噪声明显增大,呈超泊松分布.当费米子宇称非简并时,噪声减小,呈亚泊松分布.偏离度在大偏压区对Majorana费米子更为敏感.说明有限温度与有限电压条件下的电流全计数统计可以表征Majorana费米子.

关键词:拓扑超导体;量子点;Majorana费米子

中图分类号:O469　　**DOI**:10.19789/j.1004-9398.2021.01.005

0　引　言

拓扑超导体是近年凝聚态物理的研究热点,原因之一是Majorana费米子(Majorana fermions,MFs)的存在[1].MFs是自身的反粒子,遵从非阿贝尔统计.作为非阿贝尔任意子,MFs受拓扑保护,环境的局域干扰无法破坏非局域的MFs,从而不会受到退相干的影响,因此,在拓扑量子计算中有重要应用[2-3].实验上用锑化铟(InSb)或砷化铟(InAs)强自旋-轨道耦合的半导体纳米线,与s-波超导体形成异质结构,结合超导电性作用以及外加磁场实现一维拓扑超导体,在其两端产生MFs[4].由于一维拓扑超导体容易调制和操控MFs,从而被广泛用于目前实验中[5].最近,有研究成功地将量子点(quantum dot,QD)与InAs纳米线制备在一起,利用QD的微分电导谱观测到Andreev束缚态合并形成的MFs[6].零偏压附近出现的反常电导峰可能作为MFs存在的证据[7].但是,其他非拓扑物理机制,如无序[8]、Andreev束缚态[9]等也能产生类似的零偏压电导峰,因此,需要用其他表征办法进一步甄别MFs.

迄今,诸多方案主要讨论了QD-MFs结构在零偏压附近的反常电导峰[10],以及温度为0或大偏压极限的散粒噪声谱[11].如温度为0时,零偏压电导峰由于QD与MFs耦合而减小[12];在大偏压极限下,MFs导致散粒噪声显著增大[13];大偏压极限下,零频全计数统计证明了相同结构中存在MFs[11].目前对有限温度与偏压下的噪声研究鲜有报道,本文考虑QD-MFs耦合系统,研究了有限温度与偏压的全计数统计,证明了高阶计数统计更加敏感于MFs的存在.

1　模型与方法

1.1　QD-MFs耦合模型

量子点与纳米线耦合的装置如图1所示.纳米线处于拓扑超导态,两端产生的MFs分别表示为γ_1和γ_2,满足$\gamma_i=\gamma_i^\dagger$,$\{\gamma_i,\gamma_j\}=2\delta_{ij}$.量子点与近邻$\gamma_1$耦合,处于强库仑阻塞区,并跟电极构成测量回路.整个系统的哈密顿量可写作$H=H_s+H_l+H_t$.$H_l=\sum_{\alpha=L,R}\sum_k \varepsilon_{\alpha k}c_{\alpha k}^\dagger c_{\alpha k}$,表示左右2个金属电极,$c_{\alpha k}^\dagger(c_{\alpha k})$为电极电子的产生(湮灭)算符,电子波矢量与能量分别用k与$\varepsilon_{\alpha k}$表示.$H_t=\sum_{\alpha=L,R}\sum_k t_\alpha d c_{\alpha k}^\dagger+\text{H.c.}$表示量子点与电极间的隧穿耦合,耦合强度为$t_\alpha$,假定电极的电子态密度$D_\alpha$是常数,则电子隧穿率为$\Gamma_\alpha=2\pi D_\alpha\left|t_\alpha\right|^2$.中间QD与MFs耦合系统的哈密顿量用$H_s$来描述,具体表述为

收稿日期:2020-03-13

* 通信作者:gjhaso@163.com

$$H_s = \varepsilon_d d^\dagger d + \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_m \gamma_1\gamma_2 + (\lambda d - \lambda^* d^\dagger)\gamma_1, \quad (1)$$

式中 $d^\dagger(d)$ 表示 QD 上电子的产生(湮灭)算符,ε_d 为电子能量,实验上可由改变栅极电压调节,$\varepsilon_m \sim e^{-L/\xi}$ 为 MFs 分裂能,反映 2 个 MFs 波函数之间的重叠程度,纳米线的有效长度用 L 表示,超导相干长度用 ξ 表示,量子点与近邻 MFs 的耦合强度为 λ.

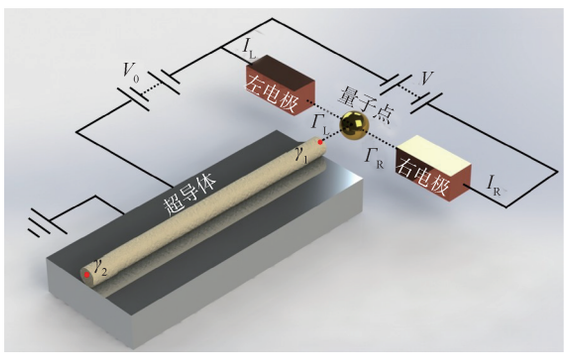


图 1　量子点与 Majorana 费米子耦合模型

1.2　计算方法

引入非局域 Dirac 费米子 f: $\gamma_1 = f^\dagger + f$, $\gamma_2 = \mathrm{i}(f^\dagger - f)$,满足 $\{f, f^\dagger\} = 1$,占据数 $n_f = f^\dagger f$.哈密顿量 H_s 可改写为

$$H_s = \varepsilon_d d^\dagger d + \varepsilon_m\left(f^\dagger f - \frac{1}{2}\right) + (\lambda d f^\dagger + \lambda_1 d f + \mathrm{H.c.}), \quad (2)$$

式中 $\lambda_1 = \lambda$ 表示 QD 与 MFs 耦合,$\lambda_1 = 0$ 表示 QD 与 Dirac 费米子的隧穿.为研究有限温度与有限电压的电荷输运,需要将 H_s 对角化.取 QD-MFs 的直积表象 $|n_d n_f\rangle$, $n_d(n_f) = 0,1$,表示 QD 或非局域费米子能级上的电子占据数.QD-MFs 总电子数的宇称守恒,$\{|01\rangle, |10\rangle\}$ 构成奇宇称子空间,$\{|00\rangle, |11\rangle \equiv f^\dagger d^\dagger|00\rangle\}$ 构成偶宇称子空间,在 H_s 中分别对应分块对角化的子矩阵 H_s^o 与 H_s^e.当 $\varepsilon_m(\varepsilon_d) = 0$ 时,奇偶宇称子空间彼此等价 $H_s^o = H_s^e$,称为费米子宇称简并;而 $\varepsilon_m(\varepsilon_d) \neq 0$ 会破坏该宇称简并.奇(偶)宇称子空间的本征态

$$\begin{aligned}
|o^+\rangle &= \frac{1}{N_o}\left[\lambda|01\rangle + \left(\frac{\delta_-}{2} + \Omega_o\right)|10\rangle\right],\\
|o^-\rangle &= \frac{1}{N_o}\left[\left(\frac{\delta_-}{2} + \Omega_o\right)|01\rangle - \lambda|10\rangle\right],\\
|e^+\rangle &= \frac{1}{N_e}\left[\lambda_1|00\rangle + \left(\frac{\delta_+}{2} + \Omega_e\right)|11\rangle\right],\\
|e^-\rangle &= \frac{1}{N_e}\left[\left(\frac{\delta_+}{2} + \Omega_e\right)|00\rangle - \lambda_1|11\rangle\right],
\end{aligned} \quad (3)$$

本征能量分别为:

$$\begin{aligned}
E_{o^\pm} &= \frac{\varepsilon_d}{2} \pm \Omega_o,\\
E_{e^\pm} &= \frac{\varepsilon_d}{2} \pm \Omega_e,
\end{aligned} \quad (4)$$

式中 $\delta_\pm = \varepsilon_d \pm \varepsilon_m$, $2\Omega_{o(e)} = \sqrt{\delta_\mp^2 + 4\lambda_{(1)}^2}$,描述奇(偶)宇称空间中能量本征态的拉比分裂,$N_{o(e)}$ 为归一化系数.

将电极自由度求平均后,QD-MFs 系统可用约化密度矩阵 $\rho(t)$ 描述.设 QD 与电极耦合较弱,将 $\rho(t)$ 的运动方程展开至 Γ_α 的二阶项,忽略系统能级的拉姆移位,可得到关于 QD-MFs 系统的量子主方程[14].在能量本征表象中,相干性($\rho(t)$ 的非对角元)和能级占据数($\rho(t)$ 的对角元)无关,得到 QD-MFs 本征态 $|a\rangle = |e^i\rangle, |o^i\rangle$ 占据数 $P_a(t) = \langle a|\rho(t)|a\rangle$ 的演化方程

$$\dot{P}_a(t) = \sum_{a'}(W_{aa'}P_{a'} - W_{a'a}P_a), \quad \sum_a P_a = 1, \quad (5)$$

$$W_{aa'} = \sum_{\alpha=\mathrm{L,R}}\{\Gamma_\alpha^{aa'}F_\alpha(E_{aa'}) + \Gamma_\alpha^{a'a}[1 - F_\alpha(E_{a'a})]\},$$

$$\Gamma_\alpha^{aa'} = \Gamma_\alpha\left|\sum_{\substack{n_d n_f \in e\\ n_d' n_f' \in o}}\beta_{n_d n_f}^{e^i *}\beta_{n_d' n_f'}^{o^j}\left\langle n_d n_f\middle|d\middle|n_d' n_f'\right\rangle\right|^2, \quad (6)$$

式中 $E_{aa'} = E_a - E_{a'}$, E_a 为本征态 $|a\rangle$ 的能量,$F(E) = 1/(e^{(E-\mu_\alpha)/T} + 1)$ 为 α 电极的费米分布函数,电子温度为 T,化学势 $\mu_{\mathrm{L(R)}} = V_0 \pm V/2$, V_0 为超导体化学势.令 $k_\mathrm{B} = e = \hbar = 1$. $\beta_{n_d n_f}^{e(o)}$ 为宇称空间本征态式(3)的各投影分量.

采用特征多项式办法来计算电流全计数统计分布[15],将其推广至有限温度.考虑右电极收集的电子数,定义从 QD 流进右电极的电流为正,并在式(5)第 1 项的量子跳跃过程中引入计数变量 χ,即

$$\begin{aligned}
W_{aa'} = {}& \Gamma_\mathrm{L}^{aa'}F_\mathrm{L}(E_{aa'}) + \Gamma_\mathrm{L}^{a'a}[1 - F_\mathrm{L}(E_{a'a})] +\\
& e^{-\chi}\Gamma_\mathrm{R}^{aa'}F_\mathrm{R}(E_{aa'}) + e^{+\chi}\Gamma_\mathrm{R}^{a'a}[1 - F_\mathrm{R}(E_{a'a})],
\end{aligned} \quad (7)$$

最后 2 项 $\sim e^{\mp\chi}$ 表示对从右电极(QD)进入 QD(右电极)的电子计数,$\pm$ 代表电流的正负方向.将式(5)改写成矢量方程 $\dot{P}_\chi(t) = \mathcal{L}_\chi P_\chi(t)$,超算符 $\mathcal{L}_\chi = \mathcal{L}_0 + e^\chi\mathcal{L}_+ + e^{-\chi}\mathcal{L}_-$ 为 4×4 维矩阵,其中 $\mathcal{L}_\pm$ 与 $\mathcal{L}_0$ 分别对应有、无电子计数项.$P_\chi(t)$ 的特征多项式定义为 $T_\chi(\lambda) = \det[\lambda\boldsymbol{I} - \mathcal{L}_\chi]$, $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.$T_\chi(\lambda)$ 含有关于计数统计的全部信息,可展开为计数变量 χ 的多项式

$$T_\chi(\lambda) = \sum_{j=0}^{4}a_j(\chi)\lambda^j = \lambda^4 + a_3\lambda^3 + \sum_{j=0}^{2}a_j(\chi)\lambda^j. \quad (8)$$

将 $T_\chi(\lambda)$ 在 $\chi = 0$ 附近做泰勒展开.设 $T_\chi(\lambda)$ 中最小本征值为 $\lambda_0(\chi)\big|_{\chi\to0} = 0$, $\lambda_0(\chi)$ 决定了电流各阶累

积矩 $\lambda_0(\chi)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\chi^k/k!$. 将 $\lambda_0(\chi)$ 代入特征多项式中,做二项式展开.最后合并系数展开至 χ^k,则各项系数 $a_j=a_j(\chi)\big|_{\chi=0}$ 及其导数 $a_j^{(n)}=\partial_\chi^n a_j(\chi)\big|_{\chi=0}$ 决定了各阶累积矩 c_k. 由此可得平均电流(c_1)、方差(c_2)、偏斜度(c_3)以及法诺因子($F\equiv c_2/c_1$)和归一化的偏斜度(偏离度)(c_3/c_1)分别为

$$c_1=-\frac{a_0^{(1)}}{a_1},$$

$$c_2=-\frac{1}{a_1}\left(a_0^{(2)}+2a_1^{(1)}c_1+2a_2c_1^2\right),$$

$$c_3=-\frac{1}{a_1}\left(a_0^{(3)}+3a_1^{(2)}c_1+6a_2^{(1)}c_1^2+6a_3c_1^3+3a_1^{(1)}c_2+6a_2c_1c_2\right),$$

$$F=\frac{c_2}{c_1}=\frac{a_0^{(2)}}{a_0^{(1)}}+\frac{2}{a_1^2}\left(a_0^{(1)}a_2-2a_1^{(1)}a_1\right),$$

$$\frac{c_3}{c_1}=\frac{a_0^{(3)}}{a_0^{(1)}}-\frac{3}{a_1^4}\left[\frac{a_1^3}{a_0^{(1)}}\left(a_0^{(1)}a_1^{(2)}+a_0^{(2)}a_1^{(1)}\right)-2a_1^2\left(a_0^{(1)}a_2^{(1)}+a_1^{(1)}a_1^{(1)}+a_2a_0^{(2)}\right)+2a_1\left(a_3a_1^{(1)}a_1^{(1)}+3a_2a_0^{(1)}a_1^{(1)}\right)-4a_2^2a_0^{(1)}a_0^{(1)}\right].\tag{9}$$

式中仅用特征多项式 $T_\chi(\lambda)$ 的系数及其导数表示出三阶累积矩,实际中容易得到特征多项式,因此,方便讨论电流的全计数统计.

1.3　数据分析

利用占据数方程研究拓扑超导体与量子点中非简并能级的全计数统计.在有限温度与偏压下,针对"T"型单量子点模型,利用全计数统计对前三阶累计矩展开研究.文中取参数 $\Gamma_\alpha=1$, $\varepsilon_m=0.1$, $\lambda=2$, $T=0.1$.

2　结果与讨论

2.1　电流与偏压

平均电流随电压的变化结果如图2所示.可见,电流呈现出3个主要特征:(1)偏压 $V\sim0$ 时,无论费米子宇称简并与否,MFs皆导致电流增大,出现微分电导峰.而没有MFs时,$V\sim0$ 处电流为零.原因在于:当 $\varepsilon_d=0$,QD与超导体费米能级 $V_0=0$ 共振,费米子奇偶宇称简并,导致系统跃迁能量 $E_{aa'}=V/2=0$,电子无需能量,即可隧穿;当 $\varepsilon_d=1$,费米子宇称非简并,但是QD与超导体费米能级 $V_0=0$ 近共振,即 $\left|E_{aa'}\right|=V/2\sim0$ 时,电子仍不需能量而隧穿.没有MFs时,系统中不存在零能量的电子跃迁能级,电流为零.可见,$V\sim0$ 处的微分电导峰是证明MFs存在的重要特征.(2)当偏压逐渐增大,电子通过能量较高的能级跃迁,在 $\left|E_{aa'}\right|=V/2$ 处出现新的电流台阶.没有MFs时,$\varepsilon_d=0$ 使能级简并,导致在 $V=2\left|E_{aa'}\right|\sim4.1$ 处电流仅有1个台阶;存在MFs时,电流呈现2个台阶,分别位于 $V\sim0$ 和 $V=2\left|E_{aa'}\right|\sim8$ 处,并和费米子宇称简并与否无关.$\varepsilon_d\neq0$ 时,简并消除,系统中存在2个跃迁能级,对应电流中的2个台阶.(3)由于QD与电极对称耦合($\Gamma_L=\Gamma_R$),MFs导致费米子宇称简并时电流的2个台阶高度相等,约为0.25;非简并时,电流第1个台阶高度略有下降.电流最终都趋于单量子点输运电流 $\Gamma_L\Gamma_R/(\Gamma_L+\Gamma_R)$[16].

2.2　电流分布

二阶累积矩阵 c_2,即电流分布的涨落,与散粒噪声直接相关.通常表示为法诺因子($F\equiv c_2/c_1$).法诺因子随偏压的变化如图3所示.(1)当 $V\ll k_BT$,热噪声起主要作用,表现为 $V=0$ 时,F 发散.(2)当 $\varepsilon_d=0$(图3(a)),由于偏压小于最低跃迁能级 $V<4.1$,没有MFs时,平均电流为零,隧穿电子间没有关联,涨落呈泊松分布,即 $F=1$;偏压继续增大,$V>4.1$ 时,电子经简并能级隧穿进右电极,并达到最大电流,隧穿电子间关联减小,呈亚泊松分布,即 $F<1$,最后趋于单量子点输运噪声 $F=(\Gamma_L^2+\Gamma_R^2)/(\Gamma_L+$

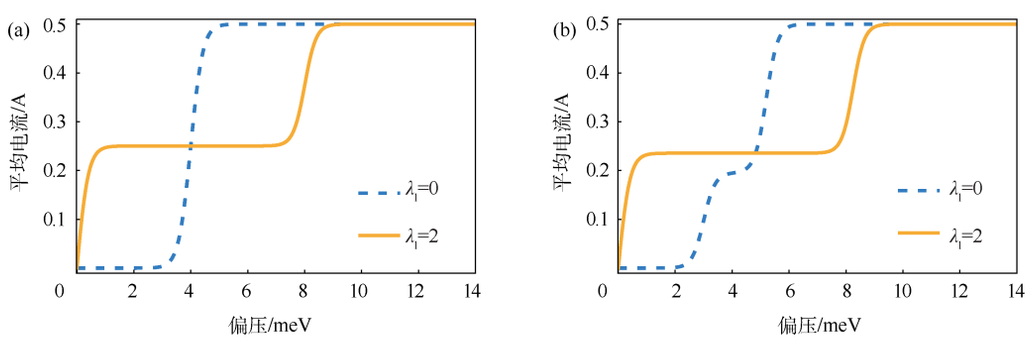


图2　平均电流随偏压的变化

(a)简并($\varepsilon_d=0$);(b)非简并($\varepsilon_d=1$)

$\Gamma_R)^2$;有 MFs 耦合时,电子不需要能量即可隧穿形成电流,但在低偏压区仍是泊松分布,隧穿电子间没有关联;增大偏压,$V = 8$附近电子隧穿之间的关联增大,呈明显的超泊松分布,即 $F > 1$,显然不同于没有 MFs 情况;再增大偏压,隧穿电子间的关联减小,$F \leqslant 1$,但是仍然远大于没有 MFs 的噪声.(3)当 $\varepsilon_d \neq 0$(图 3(b)),没有 MFs 时,F 在 $V = 2\left|E_{aa'}\right|$ 处出现 2 个台阶,分别对应系统中电子的 2 个跃迁能级.有 MFs 的情况类似.不同之处是,当偏压大于较高能量的跃迁能级时,由于费米子宇称态不简并,MFs 的噪声减小,呈明显的亚泊松分布,而没有 MFs 的结构中噪声不变,$F = (\Gamma_L^2 + \Gamma_R^2)/(\Gamma_L + \Gamma_R)^2$.

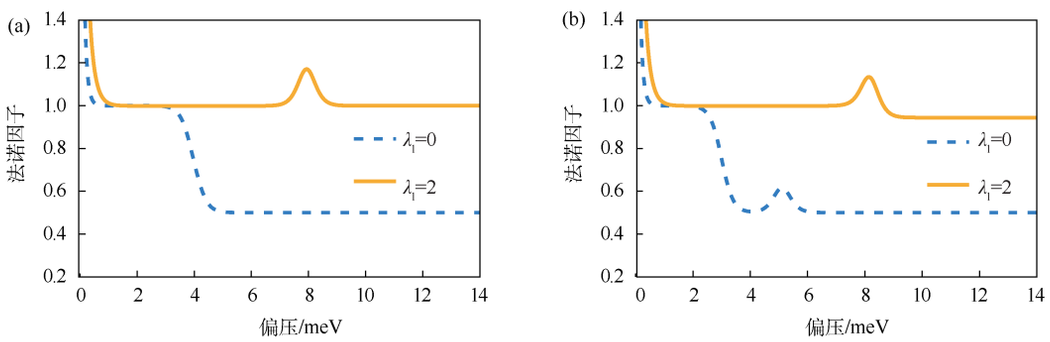


图 3　法诺因子随偏压的变化

(a)简并($\varepsilon_d = 0$);(b)非简并($\varepsilon_d = 1$)

2.3　偏离度与偏压

偏离度随偏压的变化(图 4)与 F 类似.重要的是,在大偏压区,有无 MFs 时偏离度之间的差值明显大于 F 之间的差值,说明偏离度对系统中是否存在 MFs 更为敏感.而在 $V = 0$附近,由于费米子宇称态简并(图 4(a)),导致有无 MFs 的偏离度相等.当 $\varepsilon_d \neq 0$时,费米子宇称态简并消除,MFs 使 $V = 0$附近的偏离度增大.该特征不同于 F,法诺因子在 $V = 0$附近总是趋于发散,并和费米子宇称态是否简并无关.说明在有限偏压下偏离度更易区分 MFs.

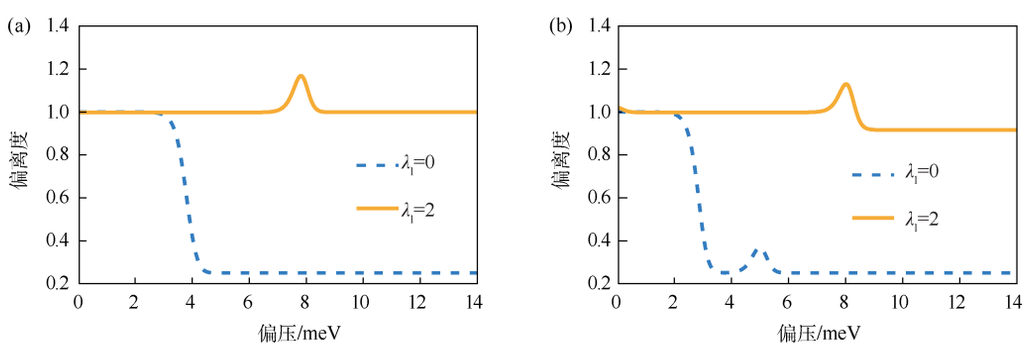


图 4　偏离度随偏压的变化

(a)简并($\varepsilon_d = 0$);(b)非简并($\varepsilon_d = 1$)

3　结　论

本文利用占据数方程,研究 QD-MFs 系统中电流的全计数统计.在有限温度与偏压下,将计数统计的各阶累积矩表示为特征多项式的各项系数及其导数.无论费米子宇称是否简并,MFs 皆导致微分电导峰.在大偏压区,噪声明显增大,呈超泊松分布.费米子宇称非简并时,噪声减小,呈亚泊松分布.偏离度在大偏压区对 MFs 更为敏感.说明有限温度与有限电压时的电流全计数统计可以表征 MFs.

参 考 文 献

[1] ELLIOTT S R, FRANZ M. Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particleand solid-state physics[J]. Rev Mod Phys, 2015, 87(1): 137-163.

[2] ALICEA J. New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems[J]. Rep Prog Phys, 2012, 75

(7):076501.
[3] NAYAK C,SIMON S H,STERN A,et al. Non-Abelian anyons and topological quantum computation[J]. Rev Mod Phys,2008,80(3):1083-1159.
[4] OREG Y,REFAEL G,OPPEN F V. Helical liquids and Majorana bound states in quantum wires[J]. Phys Rev Lett,2010,105(17):177002.
[5] MOURIK V,ZUO K,FROLOV S M,et al. Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices[J]. Science,2012,336(6084):1003-1007.
[6] DENG M T,VAITIEKENAS S,HANSEN E B,et al. Majorana bound state in a coupled quantum-dot hybrid-nanowire system[J]. Science,2016,354(6319):1557-1562.
[7] ALBRECHT S M,HIGGINBOTHAM A P,MADSEN M,et al. Exponential protection of zero modes in Majorana islands[J]. Nature,2016,531(10):206-209.
[8] BAGRETS D A,ALTLAND A. Class D spectral peak in Majorana quantum wires[J]. Phys Rev Lett,2012,109(22):227005.
[9] KELLS G,MEIDAN D,BROUWER P W. Near-zero-energy end states in topologically trivial spin-orbit coupled superconducting nanowires with a smooth confinement[J]. Phys Rev B,2012,86(10):100553.
[10] GONG W J,ZHANG S F,LI Z C,et al. Detection of a Majorana fermion zero mode by a T-shaped quantum-dot structure[J]. Phys Rev B,2014,89(24):245413.
[11] LI Z Z,LAM C H,YOU J Q. Probing Majorana bound states via counting statistics of a single electron transistor[J]. Scientific Reports,2015,5(6):11416.
[12] LIU D E,BARANGER H U. Detecting a Majorana-fermion zero mode using a quantum dot[J]. Phys Rev B,2011,84(20):201308(R).
[13] CAO Y S,WANG P Y,XIONG G,et al. Probing the existence and dynamics of Majorana fermion via transport through a quantum dot[J]. Phys Rev B,2012,86(11):115311.
[14] WANG S K,JIAO H J,LI F,et al. Full counting statistics of transport through two-channel Coulomb blockade systems[J]. Phys Rev B,2012,76(12):125416.
[15] BRUDERER M,CONTRERAS-PULIDO L D,THALLER M,et al. Inverse counting statistics for stochastic and open quantum systems:the characteristic polynomial approach[J]. New J Phys,2014,16(3):033030.
[16] BLANTER Y,BUTTIKER M. Shot noise in mesoscopic conductors[J]. Phys Rep,2000,336(1):1-166.

Full counting statistics of non-degenerate energy levels in topological superconductor coupled to a quantum dot

WANG Jing, GUO Jianhong

(Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract: Full counting statistics of non-degenerate energy levels in topological superconductor coupled to a quantum dot was studied by the equation of population. In the regime of finite temperature and bias voltage, the time-scaled current cumulants can be expressed by the coefficients and their derivatives in the characteristic polynomial of the equation of population. It was illustrated that Majorana fermions always lead to the appearance of zero-bias peak of conductance, which had nothing to do with whether the fermion parity was degenerate. At large bias voltage, the noise was enhanced by Majorana fermions, which resulted in super-Poisson distribution. When the fermions parity was non-degenerate, the noise was reduced and the distribution was sub-Poisson. The deviation degree was more sensitive to Majorana fermions in the large bias region. It showed that the current full counting statistics at finite temperature and voltage can characterize Majorana fermions.

Keywords: topological superconductors; quantumdots; Majorana fermions

(责任编辑:兰丽丽)