DOI:10.19789/j.1004-9398.2018.03.002

对 称 连 分 数*

刘效丽** 赵世恩 程小红
(首都师范大学初等教育学院,北京 100048)

摘 要

本文对对称连分数做一些探讨,给出了两个有理数所对应的简单连分数互为对称连分数的充分必要条件. 定理1.3给出两个对称连分数化简后的既约分数的分子分母满足的条件;而定理1.4指出,如果两个有理数的分子分母满足这些条件,那么它们对应的简单连分数互为对称连分数.

关键词: 简单连分数,对称连分数.
中图分类号: O177.92

0 引 言

关于连分数,有如下结论(参见[2]):

定理0.1 设$jk \equiv \pm 1 \pmod{n}$,其中$0 < j,k < n/2$. 如果n/j的连分数展开为$[a_0,a_1,\cdots,a_N]$,那么n/k的连分数展开为$[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]$.

本文中,称连分数$[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]$和$[a_0,a_1,\cdots,a_N]$互为对称连分数. 文中讨论对称连分数的一些性质,给出了对称连分数对应的分数所满足的条件,同时也对上述定理进行了证明并得到一个重要的推论.

本文所提到的连分数均指有限连分数. 一般地,连分数是指如下形式的分式

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_N}}}}$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_N$称为该连分数的商序列,而每个$a_n(0 \leqslant n \leqslant N)$称为该连分数的部分商. 上述连分数有时也简记为$[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N]$. 对于$0 \leqslant n \leqslant N$,连分数$[a_0,a_1,\cdots,a_n]$称为连分数$[a_0,a_1,\cdots,a_N]$的第$n$个渐进分数.

收稿日期:2017-05-16
* 国家自然科学基金(11401399)资助项目.
**通信作者

1 主要结果及其证明

在给出本文主要结果的证明之前,我们先回忆以下关于连分数的基本结论(参见[1]):

定理1.1 对于连分数$[a_0,a_1,\cdots,a_N]$,如果以既约分数p_n/q_n表示它的第n个渐进分数的值,即

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0,a_1,\cdots,a_n],$$

那么p_n,q_n满足以下关系:

$p_0 = a_0$, $p_1 = a_1a_0 + 1$, $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}(2 \leqslant n \leqslant N)$,

$q_0 = 1$, $q_1 = a_1$, $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}(2 \leqslant n \leqslant N)$.

$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}$,

$p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^n a_n$.

对于连分数$[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N]$,如果$a_i(1 \leqslant i \leqslant N)$均为正整数,那么该连分数称为简单连分数.

以下我们仅讨论简单连分数. 注意到任一个简单连分数化简后为一个有理数,反过来任意有理数也可以表示为简单连分数. 但是有理数用简单连分数的表示方法不是唯一的,事实上,对于简单连分数$[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_N]$,我们有

$[a_0,a_1,\cdots,a_N] = [a_0,a_1,\cdots,a_N - 1,1], a_N \geqslant 2;$

$[a_0,a_1,\cdots,a_{N-1},1] = [a_0,a_1,\cdots,a_{N-2},a_{N-1} + 1], a_N = 1.$

如果我们要求最后一个部分商大于1,那么有

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

限简单连分数的表示方法是唯一的,事实上我们有以下定理(参见[1]):

定理 1.2　如果两个简单连分数 $[a_0,a_1,\cdots,a_N]$ 与 $[b_0,b_1,\cdots,b_M]$ 有相同的值并且 $a_N>1,b_M>1$,那么 $M=N$ 并且这两个连分数相同,即 $a_n=b_n,0\leqslant n\leqslant N$.

下面,我们给出本文的主要结果及其证明.

定理 1.3　设简单连分数 $[a_0,a_1,\cdots,a_{N-1},a_N]$ 与 $[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]$ 的值分别为既约分数 p/q 与 r/s. 那么 $p=r$ 并且 $qs\equiv\pm1(\bmod p)$.

证明　由定理 1.1,连分数 $[a_0,a_1,\cdots,a_{N-1},a_N]$ 的第 n 个渐进分数的值 p_n/q_n 满足

$$p_0=a_0,\quad p_1=a_1a_0+1,$$
$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}(2\leqslant n\leqslant N),$$
$$q_0=1,\quad q_1=a_1,$$
$$q_n=a_np_{n-1}+q_{n-2}(2\leqslant n\leqslant N).$$

对于连分数 $[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]$,以 r_n/s_n 表示 $[a_n,\cdots,a_1,a_0]$. 于是

$$r_0=a_0,\quad r_1=a_0a_1+1,$$
$$r_n=a_nr_{n-1}+r_{n-2}(2\leqslant n\leqslant N),$$
$$s_0=1,s_n=r_{n-1}(1\leqslant n\leqslant N).$$

容易发现 p_n 与 r_n 满足相同的递推公式并且 $p_0=a_0=r_0,p_1=a_0a_1+1=r_1$,因此 $p_n=r_n,0\leqslant n\leqslant N$.

以下用数学归纳法证明对于 $0\leqslant n\leqslant N$ 均有 $q_ns_n\equiv\pm1(\bmod p_n)$. 显然结论对 $n=0,1$ 均成立. 假设结论对 $2\leqslant n\leqslant N$ 也成立,下面来证明结论对 $n+1$ 也成立. 事实上,

$$\begin{aligned}q_{n+1}s_{n+1}&=q_{n+1}r_n\\&=(a_{n+1}q_n+q_{n-1})p_n\\&=a_{n+1}p_nq_n+p_nq_{n-1}\\&=(p_{n+1}-p_{n-1})q_n+p_nq_{n-1}\\&=p_{n+1}q_n+p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n\\&\equiv(-1)^{n-1}(\bmod p_{n+1}).\end{aligned}$$

至此,我们证明了 $q_n=r_n$ 及 $q_ns_n\equiv\pm1(\bmod p_n)$ 对于 $0\leqslant n\leqslant N$ 均成立. 特别地,当 $n=N$ 时,$p_N/q_N=p/q,r_N/s_N=r/s$,因此定理得证.

定理 1.4　设 $jk\equiv\pm1(\bmod m)$,其中 $0<j,k<m/2$. 如果 m/j 的连分数展开为 $[a_0,a_1,\cdots,a_N]$,其中 $a_N>1$,那么 m/k 的连分数展开为 $[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]$.

证明　根据定理 1.3,连分数 $[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]$ 是 $[a_0,a_1,\cdots,a_N]$ 的对称连分数,又因为 $[a_0,a_1,\cdots,a_N]=m/j$,所以必有 $[a_N,a_{N-1},\cdots,a_1,a_0]=m/k'$,并且 $jk'\equiv\pm1(\bmod m)$. 此外,因为 $a_N>1$,所以必有 $k'<m/2$.

下面来证明 $k=k'$.

事实上,显然有 $jk\equiv jk'(\bmod m)$. 如果 $jk\equiv jk'(\bmod m)$,注意到 $(j,m)=1$ 及 $0<k,k'<m/2$,那么必有 $k=k'$. 如果 $jk\equiv-jk'(\bmod m)$,那么必有 $m\mid(k+k')$,而这与 $0<k+k'<m$ 矛盾,证毕.

推论 1.5　如果 $jk\equiv\pm1(\bmod m)$,$0<j,k<m$,那么分数 $(m-j)/j,j/(m-j),(m-k)/k,k/(m-k)$ 所对应的连分数的部分商之和相等.

证明　注意到如果 $p/q>1$ 的连分数展开为 $[a_0,a_1,\cdots,a_N]$,那么 q/p 的连分数展开为 $[0,a_0,a_1,\cdots,a_N]$,显然它们的部分商之和是相同的. 由此可见,只要证明 $(m-j)/j$ 与 $(m-k)/k$ 的连分数展开的部分商之和是相同的即可.

分以下情况讨论:

(1) 如果 $0<j,k<m/2$,那么根据定理 1.4,m/j 与 m/k 互为对称连分数,从而 $(m-j)/j=m/j-1$ 与 $(m-k)/k=m/k-1$ 的连分数展开的部分商之和相同.

(2) 如果 $0<j<m/2<k<m$,注意到

$$m/k=1+\frac{1}{k/(m-k)},m/(m-k)=1+\frac{k}{m-k},$$

所以 m/k 与 $m/(m-k)$ 的连分数有的部分商之和相同. 再注意

$$j(m-k)\equiv-jk(\bmod m),$$

因此 $j(m-k)\equiv\pm1(\bmod m)$. 又因为 $0<j,m-k<m/2$,由(1)知 $(m-j)/j$ 与 $k/(m-k)$ 的连分数的部分商之和相同.

(3) 如果 $0<k<m/2<j<m$,分析同(2).

(4) 如果 $m/2<j,k<m$,则 $0<m-j,m-k<m/2$,并且

$$(m-k)(m-j)=m^2-m(k+j)+kj\equiv kj(\bmod m)\equiv\pm1(\bmod m).$$

根据情况(1),$(m-(m-j))/(m-j)=j/(m-j)$ 与 $(m-(m-k))/(m-k)=k/(m-k)$ 的连分数展开的部分商之和相同,从而 $(m-j)/j$ 与 $(m-k)/k$ 的连分数展开的部分商之和是相同的.

综上,我们对于所有情况证明了 $(m-j)/j$ 与 $(m-k)/k$ 的连分数展开的部分商之和相同,从而推论得证.

事实上,定理 1.3 和定理 1.4 给出了两个简单连分数互为对称连分数的充分必要条件.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] Hardy G H, Wright E M. An introduction to the theory of numbers [M]. 北京: 人民邮电出版社, 2007.

[2] Donald E Knuth. The art of computer programming: vol. II, seminumerical algorithms [M]. Reading Mass: Addison-Wesley, 1981.

Symmetric Continued Fraction

Liu Xiaoli Zhao Shien Cheng Xiaohong

(Elementary Education College, Capital Normal University, Beijing 100048)

Abstract

In this paper, we first recall some basic properties of continued fractions. Based on these, we study symmetric continued fractions and give necessary and sufficient conditions on two rational numbers having symmetric continued fractions. To be more precise, Theorem 1.3 gives the conditions that the numerators and denominators of the rational numbers corresponding to two symmetric continued fractions should be subject. On the other hand, Theorem 1.4 says that these conditions are also sufficient.

Key words: simple continued fraction, symmetric continued fraction.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net